MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
15 de mayo de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 6

El Supremo

Problema 1.

a) *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *una cota superior. Muestre que* $\sup A = \alpha$ *si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a.$$

De manera similar, muestre que, si $\beta \in \mathbb{R}$ *es una cota inferior de* A*, entonces* $\inf A = \beta$ *si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ a < \beta + \varepsilon.$$

b) *Sea* γ *un número real positivo. Sea* $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r < \gamma\}$*. Muestre que* A *tiene supremo y calcúlelo.*

Problema 2. *Sea*

$$A = \left\{ \frac{m}{m(n+1)+1} \middle| m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Muestre que $\sup A = 1$.

Problema 3.

a) *Sea* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función creciente. Determine si el conjunto* $f([0,1])$ *es acotado superiormente, calcule el supremo y considere si tiene máximo.*

b) *Sea* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *conjuntos no vacíos que cumples:* $A \cup B = \mathbb{R}$ *y todo elemento de* A *es menor que todo elemento de* B*. muestre que existe un número* α *tal que* $\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \le \alpha \le b$*. Muestre que* α *es único.*

Problema 4. *Sea* $\mathbb{R}'$ *los números reales hasta antes de introducir el axioma del supremo. Sea* $\mathbb{R}$ *los reales (con axioma del supremo) y* $\mathbb{F}$ *la estructura* $\mathbb{R}'$ *con, además, la negación del axioma del supremo. Sea* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}', \mathbb{R}, \mathbb{F}\}$*. Definimos un* ***corte de Dedekind*** *como un subconjunto* X *no vacío de* $\mathbb{K}$ *que cumple*

1. $X \neq \mathbb{K}$
2. X *es cerrado hacia abajo:* $\forall y, z \in \mathbb{K},\ [y < z \wedge z \in X] \implies y \in X$.
3. X *no tiene máximo: no existe* $y \in X$ *tal que* $z \le y$ *para todo* $z \in X$.

a) *Demuestre que si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *entonces un conjunto* $X \subseteq \mathbb{K}$ *es un corte de Dedekind si y solo si* $X = (-\infty, \alpha)$ *para algún* $\alpha \in \mathbb{K}$.

b) *Demuestre que si* $\mathbb{K} = \mathbb{F}$*, entonces existen cortes de Dedekind que no se pueden escribir como* $(-\infty, \alpha)$ *para algún* $\alpha \in \mathbb{K}$*. (De esto es se sigue que* $\mathbb{Q}$ *tiene cortes de Dedekind que no se pueden escribir en la forma* $(-\infty, \alpha)$ *para algún* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *pues* $\mathbb{Q}$ *satisface todas las propiedades de* $\mathbb{F}$ *pues cumple con sus axiomas).*

Se puede entender este resultado como "$\mathbb{Q}$ *no tiene suficientes elementos como para representar todos sus cortes de Dedekind mientras que* $\mathbb{R}$ *sí".*

Problema 5. *Sean* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *dos conjuntos no vacíos acotados superiormente. Demuestre que*

a) *Existe* $\sup(A \cup B)$

b) $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\}$

Problema 6. *Definimos* $\|h\| = \sup\{|h(x)| \mid x \in [0,1]\}$ *para cualquier función acotada* $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Demuestre que $\|\bullet\|$ *es una norma. Es decir, para cada* $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *acotadas y para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
3. $\|f\| = 0 \iff f = o$

donde $o\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *está definida mediante* $x \mapsto 0$. *Recuerde de los auxiliares anteriores que estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto (si remplazamos* $\|\bullet\|$ *por* $|\bullet|$*).*