MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
8 de mayo de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 5

Trigonometría

Problema 1. *Muestre que*

$$\frac{1}{\cot(x)+\cot^3(x)}+\frac{1}{\tan(x)+\tan^3(x)}+\sin(2x)=\sec(x)\csc(x)$$

Solución. Notando que si $\sin(x)=0 \vee \cos(x)=0$ la expresión no hace sentido, si x es tal que esto no se cumple, entonces, si κ el lado derecho de la expresión,

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{\cot(x)[1+\cot^2(x)]}+\frac{1}{\tan(x)[1+\tan^2(x)]}+\sin(2x)\\ &= \frac{1}{\cot(x)\csc^2(x)}+\frac{1}{\tan(x)\sec^2(x)}+\sin(2x)\\ &= \tan(x)\sin^2(x)+\cot(x)\cos^2(x)+\sin(2x)\\ &= \tan(x)\sin^2(x)+\cot(x)\cos^2(x)+2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x)\kappa &= \sin^4(x)+\cos^4(x)+2\sin(x)\cos(x)\\ &= (\sin^2(x)+\cos^2(x))^2\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\therefore \kappa = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}.$$

□

Problema 2. *Resolver la ecuación*

$$\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=1 \tag{1}$$

Solución. Veremos primero si hay solución en $[-\pi/2,\pi/2]$. En este caso $\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2(x)}$

$$\begin{aligned}(1) &\iff \sqrt{3-3\sin^2(x)}+\sin(x)=1\\ &\iff \sqrt{3-3\sin^2(x)}=1-\sin(x)\\ &\implies 3-3\sin^2(x)=\sin^2(x)-2\sin(x)+1\\ &\iff 4\sin^2(x)-2\sin(x)-2=0\\ &\iff 4\sin^2(x)-4\sin(x)+2\sin(x)-2=0\\ &\iff 4\sin(x)(\sin(x)-1)+2(\sin(x)-1)=0\\ &\iff (\sin(x)-1)(4\sin(x)+2)=0\\ &\iff 4(\sin(x)-1)(\sin(x)+1/2)=0\\ &\iff \sin(x)=1\vee\sin(x)=-1/2\\ &\iff x=\pi/2\vee x=-\pi/6\end{aligned}$$

Veremos si hay solución en $[-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$, en este caso $\cos(x) = -\sqrt{1-\sin^2(x)}$

$$\begin{aligned}(1) &\iff -\sqrt{3-3\sin^2(x)} + \sin(x) = 1\\ &\iff -\sqrt{3-3\sin^2(x)} = 1 - \sin(x)\\ &\iff \text{Falso}\end{aligned}$$

Pues el lado derecho es no negativo y el lado izquierdo es no positivo, es decir, solo pueden llegar a ser iguales si ambos lados son cero pero el lado derecho no se hace cero en $[-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$.

Con esto, tenemos que los únicos candidatos a soluciones en $[-\pi, \pi]$ serán $\{\pi/2, -\pi/6\}$ es fácil verificar que estas son efectivamente soluciones de la ecuación (1). Como $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ es 2π-periódica, se sigue que los ceros serán

$$\{\pi/2 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/6 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\square$

Problema 3.

a) *Considere el triángulo $\triangle ABC$ de lados a, b y c, y ángulos opuestos α, β y γ, respectivamente.*

(I) *Use el teorema del coseno para demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha$.*

(II) *El teorema del seno nos indica que $\sin(\alpha)/a = \sin(\beta)/b = \sin(\gamma)/c$. Llamando K al valor común de esos tres cuocientes y siendo M al área del triángulo $\triangle ABC$, demuestre que $M = \frac{1}{2}Kabc$.*

(III) *Utilizando lo anterior, demuestre que*

$$4M\left(\cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma)\right) = a^2 + b^2 + c^2.$$

b) *Encuentre todos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que*

$$1 - \cos(2x) + 3\cos(x) = 0. \tag{2}$$

Solución.

a)

(I) El teorema del coseno nos da las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.\end{aligned}\right\}$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta + a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\\ \iff &a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc\cos\alpha - 2ac\cos\beta - 2ab\cos\gamma\\ \iff &2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 + c^2\end{aligned}$$

(II) El área del triangulo será la mitad de la base por la altura. Tomaremos a como la base. Si h es la altura de esta base, entonces $h = c\sin(\beta) = bc\sin(\beta)/b = bcK$. Se sigue que $M = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}abcK$.

(III)

$$\begin{aligned}4M\left(\cot(\alpha) + \cot(\beta) + \cot(\gamma)\right) &= 4M\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}\right)\\ &= 2Kabc\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} + \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}\right)\\ &= 2K\left(K^{-1}bc\cos(\alpha) + K^{-1}ac\cos(\beta) + K^{-1}ab\cos(\gamma)\right)\\ &= 2bc\cos(\alpha) + 2ac\cos(\beta) + 2ab\cos(\gamma)\\ &= a^2 + b^2 + c^2.\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
(2) &\iff 1-\cos^2(x)+\sin^2(x)+3\cos(x)=0\\
&\iff 1-\cos^2(x)+1-\cos^2(x)+3\cos(x)=0\\
&\iff 2\cos^2(x)-3\cos(x)-2=0\\
&\iff 2\cos^2(x)-4\cos(x)+\cos(x)-2=0\\
&\iff 2\cos(x)[\cos(x)-2]+[\cos(x)-2]=0\\
&\iff (2\cos(x)+1)(\cos(x)-2)=0\\
&\iff 2(\cos(x)+1/2)(\cos(x)-2)=0\\
&\iff \cos(x)=-1/2 \vee \cos(x)=2\\
&\iff \cos(x)=-1/2\\
&\iff x=2k\pi \pm \arccos(-1/2)\\
&\iff x=2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

□

Problema 4. *Muestre que*

a) $\cos(\arcsin(x))=\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$

b) $\cos(\arctan(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $\sin(\arctan(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $\tan(\arcsin(x))=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\tan(\arccos(x))=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Solución. *a)* Notemos que $\arcsin(x)\in[-\pi/2,\pi/2]$ con lo que $\cos(\arcsin(x))\geq 0$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}\\
&= \sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}\\
&= \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

Remplazando cos por sin, sin por cos y arcsin por arccos, se obtiene la otra igualdad.

b) Notemos que $\arctan(x)\in(-\pi/2,\pi/2)$, es decir $\sec(\arctan(x))\geq 0$ y se sigue que

$$
\begin{aligned}
\cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sec(\arctan(x))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+(\tan(\arctan(x)))^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}
$$

Donde se utilizó $\sec^2(x)=\tan^2(x)+1$

c) Notemos que $\operatorname{sgn}(\arctan(x)) = \operatorname{sgn}(x)$.

$$\begin{aligned}
\sin(\arctan(x)) &= \operatorname{sgn}(\arctan(x))\sqrt{1-\cos^2(\arctan(x))} \\
&= \operatorname{sgn}(\arctan(x))\sqrt{1-[\cos(\arctan(x))]^2} \\
&= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}} \\
&= \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(x)|x|}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\tan(\arcsin(x)) &= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\tan(\arccos(x)) &= \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} \\
&= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

□