MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
17 de abril de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

AUXILIAR 4

Trigonometría

Problema 1.

(a) *Muestre que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \cos(x+y) = 0 \implies \sin(x+2y) = \sin(x)$$

(b) *Muestre que*

$$\cos^2(x) - \sin^2(y) = \cos(x-y)\cos(x+y)$$

Solución.

(a) Se tiene que $\cos(x+y) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x+y = \pi/2 + k\pi$. De esto se sigue que $y = \pi/2 + k\pi - x$ y, por lo tanto, $x + 2y = \pi + 2k\pi - x$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned}\sin(x+2y) &= \sin(\pi + 2k\pi - x)\\ &= \sin(2\pi k + [\pi - x])\\ &= \sin(\pi - x)\\ &= \sin(x)\end{aligned}$$

(b) Se tiene que

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Con lo que

$$\begin{aligned}\cos(x-y)\cos(x+y) &= \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)\sin^2(y)\\ &= \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)(1-\cos^2(y))\\ &= \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x) + \sin^2(x)\cos^2(y)\\ &= \cos^2(x)\cos^2(y) + \sin^2(x)\cos^2(y)) - \sin^2(x)\\ &= \cos^2(y)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) - \sin^2(x)\\ &= \cos^2(y) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

$\square$

Problema 2.

(a) *Demuestre que*

$$\forall x, y \in \mathrm{Dom}(\tan),\ \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

(b) *Demuestre que si* $x + y + z = \pi,\ y\ x, y, x \in \mathrm{Dom}(\tan),$ *entonces*

$$\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x)\tan(y)\tan(z)$$

(c) *¿Que se puede decir sobre*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1 + \cdots + x_n = \pi \implies \tan(x_1) + \cdots + \tan(x_n) = \tan(x_1) \cdots \tan(x_n)?$$

Solución.

(a)

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\\ &= \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}\\ &= \frac{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{sin(y)}{\cos(y)}\right)\cos(x)\cos(y)}{\left(1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)\cos(x)\cos(y)}\\ &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.\end{aligned}$$

(b) Podemos escribir $x + y = \pi - z$, y tomando tan (y usando la identidad de tangente de la suma) obtenemos

$$\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} = \frac{\tan(\pi) - \tan(z)}{1 + \tan(\pi)\tan(z)}.$$

Como $\tan(\pi) = 0$,

$$\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} = -\tan(z)$$

de donde obtenemos que

$$\tan(x) + \tan(y) = -\tan(z) + \tan(x)\tan(y)\tan(z).$$

Sumando $\tan(z)$ a ambos lados obtenemos la igualdad deseada.

(c) Sea $n = 4$, $x_1, x_2, x_3, x_4 = \pi/4$. Entonces, como $\tan(\pi/4) = 1$,

$$\tan(x_1) + \cdots + \tan(x_4) = 4\tan(\pi/4) = 4$$

y

$$\tan(x_1) \cdots \tan(x_4) = \tan(\pi/4)^4 = 1$$

y claramente $1 \neq 4$ con lo que la proposición es falsa.

□

Problema 3.

(a) *Muestre que*

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos kx.$$

(b) *Concluya que*

$$\frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Solución.

(a) Se tiene que, usando $\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$,

$$\begin{aligned}\sin((k+1/2)\,x) - \sin((k-1/2)\,x) &= 2\sin\left(\frac{(k+1/2)\,x - (k-1/2)\,x}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1/2)\,x + (k-1/2)\,x}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)\end{aligned}$$

(*b*) De la parte anterior se tiene que

$$\cos(kx) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \cos(1x) + \cdots + \cos(nx) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cdots + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1-\frac{1}{2}\right)x + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) \\
&= \frac{\sin(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1-\frac{1}{2}\right)x + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1-\frac{1}{2}\right)x + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \\
&= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donde se utilizó que, en la suma, cada termino sumado se cancela con sub siguiente restado y cada termino restado se cancela con el segundo sumado que estaba antes (dejando así solo el penúltimo término de la suma).

$\square$