MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
17 de abril de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 3

Espacios Geométricos y Funciones

Problema 1 (Propuesto)**.**

(*a*). *Demuestre que la distancia entre dos puntos en el plano d es una métrica. Esto es,*

(*i*) $d(A,B) \geq 0$ *para cada* A, B.

(*ii*) $d(A,B) = 0$ *si y solo si* $A = B$.

(*iii*) $d(A,B) = d(B,A)$ *para cada* A, B *(simetría).*

(*iv*) $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ *para cada trío de puntos (desigualdad triangular).*

Estas son las cuatro propiedades más importantes de la distancia.

(*b*). *Defina* $\|A\| := d(A,(0,0))$ *para cada* A. *Demuestre que* $\|\bullet\|$ *es una norma, esto es,*

(*i*) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *para cada* A, B *(donde* $(x,y)+(a,b) = (x+a, y+b)$*).*

(*ii*) $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ *para cada punto* A *y cada real* λ *(donde* $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$*).*

(*iii*) $\|A\| = 0$ *si y solo si* $A = (0,0)$.

Recuerde el propuesto del auxiliar 2. Se dijo que estas eran las tres propiedades más importantes del valor absoluto (remplazando $\|\bullet\|$ *por* $|\bullet|$*). Podemos entender, entonces, a* $\|\bullet\|$ *como un tipo de valor absoluto para puntos en el plano.*

(*c*). *Muestre que* $\|X-Y\| = d(X-Y,0) = d(X,Y)$ *(donde* $(x,y)-(a,b) = (x-a, y-b)$*).*

Problema 2. *Sea* $a > b > 0$. *Considere la elipse de ecuación* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. *La recta* $y = bx/a$ *intersecta a la elipse en los puntos* P *y* R *(*P *con coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo* PR *y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.*

Solución. Queremos encontrar las coordenadas de $P := (p_1, p_2)$ y $Q := (q_1, q_2)$. Por enunciado, P y Q serán las soluciones de

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &y = \frac{b}{a}x \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando el valor de y en la primera ecuación por el de la segunda, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a}x)^2}{b^2} = 1 &\iff x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a})^2}{b^2}\right) = 1 \\ &\iff x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\right) = 1 \\ &\iff x^2 = \frac{a^2}{2} \\ &\iff x \in \left\{\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right\} \end{aligned}$$

Denotaremos por x_1 la solución positiva y x_2 la solución negativa. Introduciendo x_1 y x_2 en la segunda ecuación del sistema, obtenemos $y_1 = bx_1/a$ y $y_2 = bx_2/a$. Con esto, las soluciones del sistema son

$$S := \left\{ \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-a}{\sqrt{2}}, \frac{-b}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Como sabemos que $P, Q \in S$ y, además, P tiene coordenadas positivas, $P = (a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ y por ende $Q = (-a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2})$. El área de un rectángulo está definido como base por altura y, como los lados del rectángulo de diagonal PQ tiene lados paralelos a los ejes, los largos de los lados será la distancia de cada una de las coordenadas de P y Q, es decir

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \frac{a}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-a}{\sqrt{2}} \right) \right| \cdot \left| \frac{b}{\sqrt{2}} - \left(\frac{-b}{\sqrt{2}} \right) \right| \\ &= \left| \frac{2a}{\sqrt{2}} \right| \cdot \left| \frac{2b}{\sqrt{2}} \right| \\ &= |a\sqrt{2}| \cdot |b\sqrt{2}| \\ &= 2ab \end{aligned}$$

$\square$

Problema 3. *Sea G un lugar geométrico y A un punto del plano. Decimos que $P \in G$ es una proyección de A sobre G si*

$$\forall X \in G,\ d(P, A) \leq d(X, A).$$

Si existe una proyección de A sobre G y esta es única, la denotamos por $p_G(A)$.

(*a*) *Muestre que para cualquier recta $L:\ y = mx + c$ con $m \neq 0$, el punto $A = (0, 0)$ tiene alguna proyección sobre L*

(*b*) *Muestre que la proyección de $A = (0, 0)$ sobre cualquier recta $L:\ y = mx + c$ con $m \neq 0$ es única.*

(*c*) *Muestre que la proyección desde cualquier punto a cualquier recta (de la forma $y = mx + c$ con $m \neq 0$) existe y es única.*

(*d*) *Calcule la pendiente de la recta que une a un punto A y su proyección sobre una recta L (de la forma ya mencionada).*

(*e*) (Propuesto) *Generalice estos resultados para las rectas que no son de la forma $y = mx + c$ con $m \neq 0$.*

Solución. (*a*) El problema consiste en mostrar que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $x \mapsto f(x) = d((x, mx + c), A)$ tiene mínimo y que éste es único.

Demostraremos que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= -m^{-1}x \end{aligned}\right\}$$

tiene solución, que denotaremos por P, y que la solución satisface $\forall X \in L,\ d(P, A) \leq d(X, A)$, con lo que obtendremos la existencia.

Igualando los valores de y en el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} mx + c = -m^{-1}x &\iff mx + m^{-1}x = -c \\ &\iff x = \frac{-c}{m + m^{-1}} \\ &\iff x = \frac{-mc}{1 + m^2}. \end{aligned}$$

Introduciendo este valor en la primera ecuación del sistema obtenemos las coordenadas de P:

$$P := (p_1, p_2) = \left(\frac{-mc}{1 + m^2}, \frac{c}{1 + m^2} \right).$$

Mostraremos ahora $\forall X \in L,\ d(P,A) \leq d(X,A) \in L$. Sea $X = (x, mx+c)$ un elemento cualquiera de L. Entonces

$$\begin{aligned}
d((x,mx+c),A)^2 - d(P,A)^2 &= x^2 + (mx+c)^2 - p_1^2 - (mp_1+c)^2 \\
&= x^2 + m^2x^2 + 2mxc + c^2 - p_1^2 - m^2p_1^2 - 2mp_1c - c^2 \\
&= x^2 + m^2x^2 + 2mxc - p_1^2 - m^2p_1^2 - 2mp_1c \\
&= (1+m^2)x^2 + (2mc)x + (-(1+m^2)p_1^2 - 2mcp_1) \\
&= (1+m^2)x^2 + (2mc)x + (-((1+m^2)p_1 + 2mc)p_1) \\
&= (1+m^2)x^2 + (2mc)x + \left(-\left((1+m^2)\frac{-mc}{1+m^2} + 2mc\right)\frac{-mc}{1+m^2}\right) \\
&= (1+m^2)x^2 + (2mc)x + \left(-\left(-mc+2mc\right)\frac{-mc}{1+m^2}\right) \\
&= (1+m^2)x^2 + (2mc)x + \frac{m^2c^2}{1+m^2} \\
&= (1+m^2)\left(x^2 + 2x\frac{mc}{1+m^2} + \frac{m^2c^2}{(1+m^2)^2}\right) \\
&= (1+m^2)\left(x^2 + 2x\frac{mc}{1+m^2} + \left(\frac{mc}{1+m^2}\right)^2\right) \\
&= (1+m^2)\left(x + \frac{mc}{1+m^2}\right)^2 \\
&= (1+m^2)(x-p_1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Es decir, $d(P,A)^2 \leq d(X,A)^2$. Se concluye que

$$d(P,A) \leq d(X,A)$$

(recordemos del auxiliar 2 que $0 < \alpha \leq \beta \implies \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$) con lo que se concluye la existencia de una proyección de $(0,0)$ para cualquier recta L.

(b) La unicidad de la proyección se tiene de manera directa del desarrollo anterior: como $d(X,A)^2 - d(P,A)^2$ se anula solamente para $x = p_1$ y para el resto es estrictamente positivo, si $x \neq p_1$, entonces $d(X,A) < d(P,A)$ con lo que cualquier otro punto distinto de P no será proyección. Con esto se concluye la existencia y unicidad de la proyección de $A = (0,0)$ y la denotamos por $p_L(A)$.

(c) Sea $A = (a_1, a_2)$ y $L:\ y = mx + c$ con $m \neq 0$. Consideremos $L':\ y = m(x+a_1) + c - a_2$ la cual se puede escribir como $L':\ y = mx + (-ma_1 + c - a_2)$ con $m \neq 0$. Por la parte anterior, existe una proyección única $p_{L'}(0)$ de $0 := (0,0)$ sobre L' que para cada $X \in L'$ cumple $d(p_{L'}(0), 0) \leq d(X, 0)$ o, lo que es equivalente (Ver última pregunta de problema 1), $d(p_{L'}(0) + A, A) \leq d(X + A, A)$ pero, como $X + A \in L \iff X \in L'$ (verifíquelo), se tiene que (usando $X' = X + A$) $\forall X' \in L,\ d(p_L(0) + A, A) \leq d(X', A)$ con lo que A tiene proyección sobre L. Para la unicidad, basta toma una proyección C de A sobre L cualquiera y, usando el mismo método recién empleado, concluir que $C - A$ es proyección de $(0,0)$ sobre L' con lo que, por la parte anterior, $p_{L'}(0) = C - A$. Se sigue que $C = p_{L'}(0) + A$ y se concluye la unicidad.

(d) Lo calcularemos para el caso $A = (0,0)$. Se vio en la parte A que la proyección era la solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= -m^{-1}x \end{aligned}\right\}.$$

Basta notar que $y = -m^{-1}x$ pasa por $(0,0)$ y por $p_L(0)$ (pues sabemos que es solución del sistema). Es decir, la pendiente de la recta que pasa por la proyección y el punto que está siendo proyectado será $-m^{-1}$ donde m es la pendiente de L. Es decir, la proyección es el punto que cae perpendicular de $(0,0)$ a la recta L.

Para generalizar esto a un A arbitrario, se hace un proceso similar al de la parte c (verifíquelo). □

Problema 4. *Sea f una función definida en los reales que es no-nula. Suponga que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$ para cada par de reales x, y. Demuestre que $f(x) = x$. Para esto,* (*a*) *Demuestre que* $f(1) = 1$.

(*b*) *Demuestre que* $f(x) = x$ *si* x *es racional.*

(*c*) *Demuestre que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

(*d*) *Demuestre que* $f(x) > f(y)$ *si* $x > y$.

(*e*) *Demuestre que* $f(x) = x$.

Solución. (*a*) Sea x_0 un real tal que $f(x_0) \neq 0$. Entonces $f(x_0) = f(x_0 \cdot 1) = f(x_0)f(1)$ y se sigue que $f(1) = 1$.

(*b*) Partiremos mostrando esto para el cero, luego para los naturales, luego para los enteros y finalmente para los racionales. Se tiene que $f(0) = f(2 \cdot 0) = f(2)f(0) = f(1+1)f(0) = (f(1)+f(1))f(0) = 2f(0)$. Se sigue que $f(0) = 0$. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, luego $f(n) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ veces}} = n$ (formalice, usando inducción, el uso de "n veces").

Sea m un entero. Si no es negativo, estamos listos, si es negativo, entonces $f(m) = f(-1|m|) = f(-1)f(|m|) = f(-1)|m|$ y estamos listos pues $f(-1) = -1$: $0 = f(0) = f(1+(-1)) = f(1) + f(-1) = 1 + f(-1)$.

Mostremos la propiedad ahora para un racional pq^{-1} con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $f(pq^{-1}) = f(p)f(q^{-1}) = pf(q^{-1})$ y estamos listos pues $1 = f(1) = f(qq^{-1}) = f(q)f(q^{-1}) = qf(q^{-1})$ con lo que $f(q^{-1}) = q^{-1}$ y $f(pq^{-1}) = pq^{-1}$.

(*c*) Sea $x > 0$. Luego $f(x) = f(\sqrt{x}^2) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$. Además, $f(x) \neq 0$ pues, de ser así, entonces $f(a) = f(xax^{-1}) = f(x)f(a)f(x^{-1}) = 0$ para todo a, lo que contradice el hecho que f es no-nula.

(*d*) Sea $x < y$, luego $y - x > 0$. Por la parte anterior, $0 < f(y-x) = f(y+(-x)) = f(y)+f(-x) = f(y)+f(-1x) = f(y)-f(x)$ con lo que $f(x) < f(y)$.

(*e*) Asumamos que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq x$. Asumamos $x < f(x)$ (el otro caso es análogo). Sean q racional tal que $x < q < f(x)$. Luego $x < q = f(q) < f(x)$, es decir, $x < q$ y $f(q) < f(x)$, lo que contradice el resultado anterior. Note que aquí se utilizó el hecho de que entre cada par de reales existe un racional o, equivalentemente, existe un racional en cada intervalo abierto.

□

Problema 5. *Sea* $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

(*a*) *Encuentre su dominio, ceros y signos.*

(*b*) *Pruebe que* f *es inyectiva.*

(*c*) *Demuestre que el recorrido de* f *es* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

(*d*) *Encuentre la inversa de* f *y explicite su dominio y recorrido.*

Solución. (*a*) El único momento en el que la expresión puede no hacer sentido es cuando $2x + 1 = 0$ (es decir, $x = -1/2$). Se sigue que $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$. La función se hace cero si y solo si $x + 1 = 0$, es decir, si $x = -1$. Se concluye que $\{-1\}$ es el conjunto de los ceros de la función. Para los signos, consideramos la siguiente tabla:

	$(-\infty, -1)$	$\{-1\}$	$(-1, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{2x+1}$	$+$	0	$-$	$+$

Cuadro 1: Signo de los componentes que conforman $f(x)$.

(*b*) Sea $f(x) = f(y)$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{y+1}{2y+1} &\iff (x+1)(2y+1) = (y+1)(2x+1) \\ &\iff 2xy + x + 2y + 1 = 2xy + y + 2x + 1 \\ &\iff x + 2y = y + 2x \\ &\iff y = x \end{aligned}$$

con lo que f es inyectiva.

(*c*) Sea $y \neq 1/2$. Queremos un x tal que $f(x) = y$. Es decir, hay que mostrar que $f(x) = y$ tiene solución como ecuación en $x \in D(f)$ con $y \neq 1/2$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x+1}{2x+1} = y \\ &\iff x + 1 = 2xy + y \\ &\iff x - 2xy = y - 1 \\ &\iff x(1-2y) = y - 1 \\ &\iff x = \frac{y-1}{1-2y} \end{aligned}$$

donde se usó que $y \neq 1/2$ para poder dividir por $(1-2y)$. Con lo que $f((y-1)/(1-2y)) = y$ para cada $y \neq 1/2$ y $\mathbb{R} \setminus \{1/2\} \subseteq R(f)$. Mostremos ahora que $1/2$ no tiene preimagen: Por contradicción, sea $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 1/2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2} &\iff x + 1 = x - \frac{1}{2} \\ &\iff 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Es decir, $\mathbb{R} \setminus \{1/2\} = R(f)$.

(*d*) Para encontrar la función inversa, resolvemos la ecuación sobre $x \in D(f)$ para cada $y \in R(f)$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x+1}{2x+1} = y \\ &\iff x + 1 = 2xy + y \\ &\iff x - 2xy = y - 1 \\ &\iff x(1-2y) = y - 1 \\ &\iff x = \frac{y-1}{1-2y} \\ &\iff f^{-1}(y) = \frac{y-1}{1-2y} \end{aligned}$$

Como f^{-1} es la función inversa de f, se tendrá que $D(f^{-1}) = R(f)$ y $R(f^{-1}) = D(f)$.

$\square$