

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

17 de abril de 2023



AUXILIAR 3

Espacios Geométricos y Funciones

Problema 1 (Propuesto).

(a). Demuestre que la distancia entre dos puntos en el plano d es una métrica. Esto es,

- (i) $d(A, B) \geq 0$ para cada A, B .
- (ii) $d(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.
- (iii) $d(A, B) = d(B, A)$ para cada A, B (simetría).
- (iv) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ para cada trío de puntos (desigualdad triangular).

Estas son las cuatro propiedades más importantes de la distancia.

(b). Defina $\|A\| := d(A, (0, 0))$ para cada A . Demuestre que $\|\bullet\|$ es una norma, esto es,

- (i) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ para cada A, B (donde $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$).
- (ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ para cada punto A y cada real λ (donde $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$).
- (iii) $\|A\| = 0$ si y solo si $A = (0, 0)$.

Recuerde el propuesto del auxiliar 2. Se dijo que estas eran las tres propiedades más importantes del valor absoluto (reemplazando $\|\bullet\|$ por $|\bullet|$). Podemos entender, entonces, a $\|\bullet\|$ como un tipo de valor absoluto para puntos en el plano.

(c). Muestre que $\|X - Y\| = d(X - Y, 0) = d(X, Y)$ (donde $(x, y) - (a, b) = (x - a, y - b)$).

Problema 2. Sea $a > b > 0$. Considere la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. La recta $y = bx/a$ intersecta a la elipse en los puntos P y R (P con coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo PR y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

Problema 3. Sea G un lugar geométrico y A un punto del plano. Decimos que $P \in G$ es una proyección de A sobre G si

$$\forall X \in G, d(P, A) \leq d(X, A).$$

Si existe una proyección de A sobre G y esta es única, la denotamos por $p_G(A)$.

- (a) Muestre que para cualquier recta $L : y = mx + c$ con $m \neq 0$, el punto $A = (0, 0)$ tiene alguna proyección sobre L .
- (b) Muestre que la proyección de $A = (0, 0)$ sobre cualquier recta $L : y = mx + c$ con $m \neq 0$ es única.
- (c) Muestre que la proyección desde cualquier punto a cualquier recta (de la forma $y = mx + c$ con $m \neq 0$) existe y es única.
- (d) Calcule la pendiente de la recta que une a un punto A y su proyección sobre una recta L (de la forma ya mencionada).
- (e) (Propuesto) Generalice estos resultados para las rectas que no son de la forma $y = mx + c$ con $m \neq 0$.

Problema 4. Sea f una función definida en los reales que es no-nula. Suponga que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$ para cada par de reales x, y . Demuestre que $f(x) = x$. Para esto,

- (a) Demuestre que $f(1) = 1$.

- (b) Demuestre que $f(x) = x$ si x es racional.
- (c) Demuestre que $f(x) > 0$ si $x > 0$.
- (d) Demuestre que $f(x) > f(y)$ si $x > y$.
- (e) Demuestre que $f(x) = x$.

Problema 5. Sea $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

- (a) Encuentre su dominio, ceros y signos.
- (b) Pruebe que f es inyectiva.
- (c) Demuestre que el recorrido de f es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
- (d) Encuentre la inversa de f y explicita su dominio y recorrido.