MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
3 de abril de 2023

Auxiliar 2

Axiomas de Orden de los Números Reales

Problema 1 (Propuesto)**.**

(a). *Demuestre que el valor absoluto es una norma. Es decir,*

- *desigualdad triangular:* $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leq |x| + |y|$,
- *homogeneidad absoluta:* $\forall \lambda, x \in \mathbb{R},\ |\lambda x| = |\lambda||x|$,
- *punto separante:* $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \iff x = 0$.

Estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto.

(b). *Sea* $x, y \in \mathbb{R}$*. Demuestre que*

- $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$,
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$,
- $|-x| = |x|$,
- $|x| < y \iff -y < x < y$,
- $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

Problema 2. *Resuelva la inecuación*

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{|x-2| - 1} \leq 0.$$

Problema 3. *Considere la inecuación sobre la variable* x

$$\big||x| - a\big| < 1$$

donde a *es un real. Encuentre el conjunto de todos los valores de* a *tal que la ecuación no tiene solución.*

Problema 4. *Demuestre que, si* $x_0 \neq 0$, $\varepsilon > 0$ *y*

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|^2}{2}\right)$$

entonces $x \neq 0$ *y*

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

Concluya que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ |x - x_0| < \delta \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

Problema 5. *Resuelva la inecuación*

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)\big|x + |x-2|\big|} < \frac{1}{2}.$$

Problema 6. *Sea* $0 < a < b$.

(a). *Muestre que* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

(b). *Muestre que*

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$