

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

3 de abril de 2023



PAUTA AUXILIAR 2

Axiomas de Orden de los Números Reales

Problema 1 (Propuesto).

(a). Demuestre que el valor absoluto es una norma. Es decir,

- desigualdad triangular: $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$,
- homogeneidad absoluta: $\forall \lambda, x \in \mathbb{R}, |\lambda x| = |\lambda||x|$,
- punto separante: $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$.

Estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto.

(b). Sea $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

- $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$,
- $|-x| = |x|$,
- $|x| < y \iff -y < x < y$,
- $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

Problema 2. Resuelva la inecuación

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{|x - 2| - 1} \leq 0. \quad (1)$$

Solución. Primero, es necesario determinar para que valores de x la expresión hace sentido. Para esto, es necesario que $|x - 2| - 1 = 0$. Es decir, hay que excluir las soluciones de

$$\begin{aligned} |x - 2| - 1 = 0 &\iff |x - 2| = 1 \\ &\iff \begin{cases} x - 2 = 1, & x \geq 2 \\ 2 - x = 1, & x < 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3, & x \geq 2 \\ x = 1, & x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore x \notin \{1, 3\} \quad (2)$$

A partir de ahora, asumiremos $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$. Se tiene

$$\begin{aligned} (1) &\iff \frac{x(x^2 + x + 1)}{|x - 2| - 1} \leq 0 \\ &\iff \frac{x(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4})}{|x - 2| - 1} \leq 0 \\ &\iff \frac{x((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})}{|x - 2| - 1} \leq 0 \end{aligned}$$

Dividiendo a ambos lados por el número positivo $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$,

$$\begin{aligned}
 (1) &\iff \frac{x}{|x-2|-1} \leq 0 \\
 &\iff \begin{cases} \frac{x}{x-2-1} \leq 0, & x \geq 2 \\ \frac{x}{2-x-1} \leq 0, & x < 2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{x}{x-3} \leq 0, & x \geq 2 \\ \frac{x}{1-x} \leq 0, & x < 2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{x-3} \leq 0, & x \geq 2 \text{ } (\star) \\ \frac{x}{1-x} \leq 0, & x < 2 \text{ } (*) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donde en el último paso se dividió por el número positivo x (el cual es mayor o igual que 2). Con lo que $(\star)$ y $(*)$ son dos ecuaciones simples. Claramente, $1/(x-3)$ en $(\star)$ tendrá el mismo signo que $x-3$ por lo que el conjunto de solución de $(\star)$ será $[2, 3)$ (notar que excluimos a 3 debido a (2)). Para $(*)$ consideramos la siguiente tabla:

	$(-\infty, 0)$	$\{0\}$	$(0, 1)$	$(1, 2)$
x	-	0	+	+
$1-x$	+	+	+	-
$\frac{x}{1-x}$	-	0	+	-

Cuadro 1: Signo de los componentes que conforman $(*)$.

Con lo que la solución de $(\star)$ es $(-\infty, 0] \cup (1, 2)$.

Juntando las soluciones de $(*)$ y $(\star)$, se tiene que

$$\boxed{[-\infty, 0] \cup (1, 3)}$$

es la solución de la inecuación. □

Problema 3. Considere la inecuación sobre la variable real x

$$||x| - a| < 1 \tag{3}$$

donde a es un real. Encuentre el conjunto de todos los valores de a tal que la ecuación no tiene solución.

Solución. Para saber cuales valores de a hacen que el conjunto solución sea $\emptyset$, es necesario primero encontrar el conjunto solución y luego considerar como a afecta a este. Es decir, queremos solucionar (3). Se tiene que

$$\begin{aligned}
 ||x| - a| < 1 &\iff -1 < |x| - a < 1 \\
 &\iff a - 1 < |x| < a + 1 \\
 &\iff (a - 1 < |x|) \wedge (|x| < a + 1) \\
 &\iff (|x| \leq a - 1) \wedge (-a - 1 < x < a + 1) \\
 &\iff (-a + 1 \leq x \leq a - 1) \wedge (x \in (-a - 1, a + 1)) \\
 &\iff (x \in [-a + 1, a - 1]) \wedge (x \in (-a - 1, a + 1)) \\
 &\iff (x \notin [-a + 1, a - 1]) \wedge (x \in (-a - 1, a + 1)) \\
 &\iff (x \in ((-\infty, -a + 1) \cup (a - 1, \infty))) \wedge (x \in (-a - 1, a + 1)) \\
 &\iff x \in ((-\infty, -a + 1) \cup (a - 1, \infty)) \cap (-a - 1, a + 1)
 \end{aligned}$$

Como siempre $-a - 1 \leq -a + 1$ y $a - 1 \leq a + 1$, la única forma de que el conjunto solución sea vacío es si $a + 1 \leq -a - 1$. Es decir el conjunto de valores para a en los que (3) no tiene solución será

$$\boxed{(-\infty, -1]}.$$

□

Problema 4. Demuestre que, si $x_0 \neq 0$, $\varepsilon > 0$ y

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}\right)$$

entonces $x \neq 0$ y

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

Concluya que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

Solución. Si $x = x_0$, entonces el resultado es directo, asumiremos $x \neq x_0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \frac{|x_0|}{2} &\implies ||x| - |x_0|| < \frac{|x_0|}{2} \\ &\implies -\frac{|x_0|}{2} < |x| - |x_0| \\ &\implies |x_0| - \frac{|x_0|}{2} < |x| \\ &\implies \frac{|x_0|}{2} < |x| \quad (*) \\ &\implies \frac{|x_0|^2}{2} < |xx_0| \\ &\implies \frac{1}{|xx_0|} < \frac{2}{|x_0|^2} \\ &\implies \frac{|x - x_0|}{|xx_0|} < \frac{2|x - x_0|}{|x_0|^2} \\ &\implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{2}{|x_0|^2}|x - x_0| \\ &\implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{2}{|x_0|^2} \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2} \quad (*) \\ &\implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donde (*) se justifica mediante $|x - x_0| < \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}$. Notemos, además, que (*) implica que $0 < |x|$ con lo que $x \neq 0$. La conclusión es directa. □

Problema 5. Resuelva la inecuación

$$\frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)|x + |x - 2|} < \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Solución. Primero tenemos que ver los valores de x para los cuales la expresión hace sentido. Es decir, queremos excluir las

soluciones de $(x-2)|x-2|=0$. Claramente una solución de esta ecuación es $x=2$, para encontrar alguna otra solución:

$$\begin{aligned} |x+|x-2||=0 &\iff |x-2|=-x \\ &\iff \begin{cases} x-2=-x, & x \geq 2 \\ 2-x=-x, & x < 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=1, & x \geq 2 \\ 2-x=-, & x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo que el único punto en el cual la expresión se indetermina es en $x=2$. Asumiremos $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Nos pondremos en dos casos principales: $x > 2$ y $x < 2$.

$x > 2$:

$$\begin{aligned} (4) &\iff \frac{x-2+2x+11}{(x-2)|x+x-2|} < \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{3x+9}{(x-2)|2x-2|} < \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{3x+9}{2(x-2)(x-1)} < \frac{1}{2} \\ &\iff 3x+9 < \frac{2(x-2)(x-1)}{2} \\ &\iff 3x+9 < x^2-3x+2 \\ &\iff 0 < x^2-6x-7 \\ &\iff 0 < x^2-7x+x-7 \\ &\iff 0 < (x+1)(x-7) \\ &\iff 0 < x-7 \\ &\iff 7 < x \end{aligned}$$

Es decir, en este caso, la inecuación se satisface si $x \in (7, \infty)$. Ahora nos ponemos en el caso $x < 2$:

$$\begin{aligned} (4) &\iff \frac{2-x+|2x+11|}{(x-2)|x+2-x|} < \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{2-x+|2x+11|}{2(x-2)} < \frac{1}{2} \\ &\iff 2-x+|2x+11| > x-2 \\ &\iff |2x+11| > 2x-4 \\ &\iff \begin{cases} 2x+11 > 2x-4, & x \geq -11/2 \\ -2x-11 > 2x-4, & x < -11/2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 11 > -4, & x \geq -11/2 \\ -7/4 > x, & x < -11/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, la ecuación se satisface en este caso para $x \in ((-\infty, -11/2) \cup [-11/2, 2)) = (-\infty, 2)$. Juntando ambos casos se tiene que

$$\boxed{(-\infty, 2) \cup (7, \infty)}$$

es el conjunto de las soluciones. □

Problema 6. Sea $0 < a < b$.

(a). Muestre que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

(b). Muestre que

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Solución. (a).

$$\begin{aligned}\sqrt{b} - \sqrt{a} &= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\ &> 0 \\ \therefore \sqrt{b} &> \sqrt{a}\end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned}0 < (a - b)^2 &\implies 0 < a^2 - 2ab + b^2 \\ &\implies 0 < a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &\implies 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \\ &\implies 4ab < (a + b)^2 \\ &\implies ab < \frac{(a + b)^2}{4} \\ &\implies ab < \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \\ &\implies \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Además, } a < b \implies a < 2b - b \implies a + b < 2b \implies (a + b)/2 < b \text{ y } a < b \implies a^2 < ab \implies a < \sqrt{ab}.$$

$$\therefore a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

□