**MA1101-3 Introducción al Cálculo**
**Profesor:** Leonardo Sánchez C.
**Auxiliar:** Patricio Yáñez A. y Javier Santidrian
**Consultas:** pyanez@dim.uchile.cl

# Auxiliar 16:Preparación Examen

**Resumen Clase** 0.5

- Función derivable en $x_o$: Diremos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es derivable en el punto $x_o\in(a,b)$ si existe el límite:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

O equivalentemente:

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

- Función derivable: Diremos que una función $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable, si es derivable para todo $x_o\in(a,b)$
- Derivadas conocidas: Algunos resultados típicos son:
  - $(x)'=1$
  - $(x^n)'=nx^{n-1}$
  - $(sin(x))'=cos(x)$
  - $(cos(x))'=-sin(x)$
  - $(ln(x))'=\frac{1}{x}$
  - $(e^x)'=e^x$
  - $(cte)'=0$
- Reglas de derivación: Se obtienen a partir de las propiedades de los límites:
  - $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$
  - $(f\cdot g)'(x_o=f'(x_o)g(x_o)+f(x_o)g'(x_o))$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{(g(x_o)^2}$
- Regla de la cadena: Sea $f$ diferenciable en $x_o$ y sea $g$ diferenciable en $y=f(x_o)$, entonces $g\circ f$ es diferenciable en $x_o$, y además:

$$(g\circ f)'(x_o)=g'(f(x_o))\cdot f'(x_o)$$

**P1.** Calcule las derivadas de las siguientes funciones utilizando las reglas básicas

a. $f(x)=x^4+3x^2-6$
b. $f(x)=(a+x)\sqrt{a-x}$
c. $f(x)=tan(x)$
d. $f(x)=sen(x)+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x^2}$
e. $f(x)=\frac{x^2}{x-sen(x)}$
f. $f(x)=\frac{2x^5+4x}{cos(x)}$
g. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+tan(x)+\frac{1}{tan(x)}$
h. $f(x)=\frac{x^2ln(x)}{cos(x)}$
i. $f(x)=\frac{e^x+sen(x)}{xe^x}$
j. $f(x)=\frac{e^xcos(x)}{1-sen(x)}$

**P2.** Calcule las derivadas de las siguientes funciones utilizando regla de la cadena

a. $f(x)=e^{3x^2}$
b. $f(x)=(x^2+4x+6)^4$
c. $f(x)=sen^2(x)$
d. $f(x)=\sqrt[3]{3x^3+4x}$
e. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$
f. $f(x)=sen(sen(x^2+1))$

g. $f(x) = tan\left(\frac{1}{x}\right)$

h. $f(x) = e^{tan(x^2)+x^2}$

i. $f(x) = ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

j. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 3x + 1}{ln(3x)}}$

**P3.** Considere las funciones

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$$

*a)* Derive $cosh(x)$.

*b)* Derive $sinh(x)$.

*c)* Use lo anterior para obtener la derivada de $tanh(x)$. (use reglas de derivadas para fracciones)

**P4.** Calcule las siguientes derivadas por definición:

*a)* $f(x) = \sqrt{x}$

*b)* $h(z) = z^2 + 2$

*c)* $g(x) = e^x$

*d)* $u(x) = ln(x)$

**P5.** Considere la función y estudie su crecimiento:

$$f(x) = \frac{x}{ln(x^2)}$$

I Hágalo por el método tradicional, el cual supone $x_1 < x_2$ y demostrar que $f(x_2) - f(x_1)$¡0 ó ¿0, lo cual nos habla de su crecimiento. Ojo con la paridad de la función, y además que intervalos debo estudiar.

II Hágalo mediante derivada y su definición, ¿Te la sabes no?

**P6.** Calcule las siguientes derivadas:

*a)* $f(x) = \frac{x^2 - tan^2(x)}{2x + sec(x)}$

*b)* $l(x) = sin(x^{cos(x)}) + cos(x^{sin(x)})$

*c)* $g(x) = (cos(x))^{1+sen(x)}$

*d)* $h(x) = (\pi^x + x^\pi)(xsin(3x) + 2\sqrt{3})$

*e)* $f(x) = \frac{e^{-x}}{x + e^x}$

*f)* $g(x) = ln[arcsin(\sqrt{x})^2 + cos(x)]$

*g)* $h(x) = x^{arctan(1/x)}$

**P7.** Una partícula se mueve por el eje $OX$ de modo que su posición está dada por la fórmula

$$x(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $a$ y $k$ son constantes positivas. Determine la velocidad de la partícula en función de $t$

**P8.** Estudie el crecimiento de las siguientes funciones *a*) $f(x) = e^{-x^2}$

*b*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

*c*) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2)}$

*d*) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

**P9.** Sea $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

a) Determine dominio, recorrido, ceros, signos y paridad de $f$

b) Encuentre, si existen, asíntotas verticales y horizontales

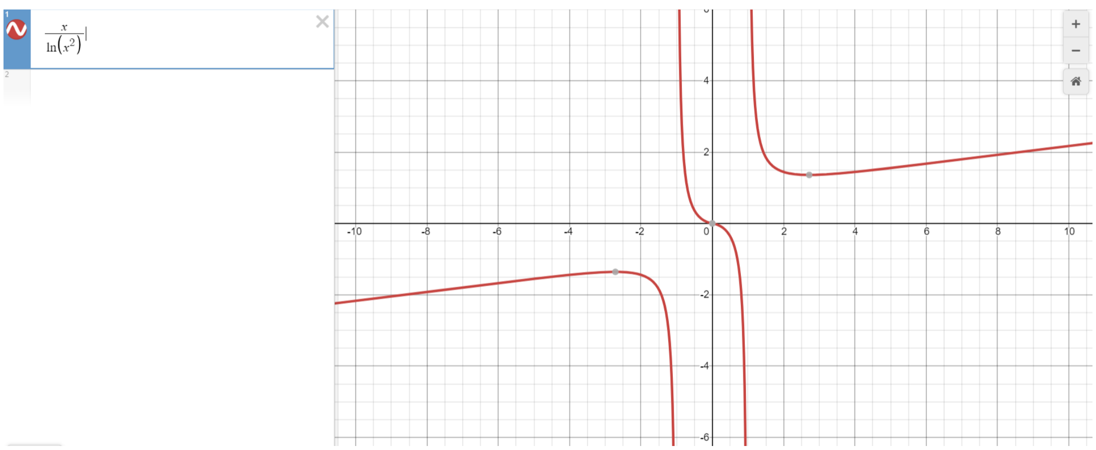
c) estudie crecimiento

d) Esboce el gráfico de $f$

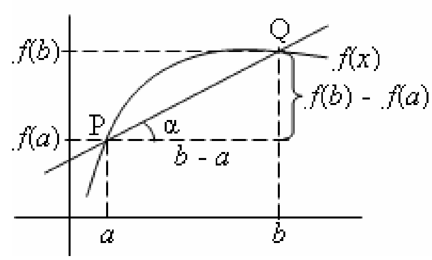
e) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de la función $f : A \to \mathbb{R}$. ¿Bajo qué condiciones $f$ sería biyectiva?

**P10.** Aporte

[R.P5]



# Tema 16. DERIVADAS Resumen

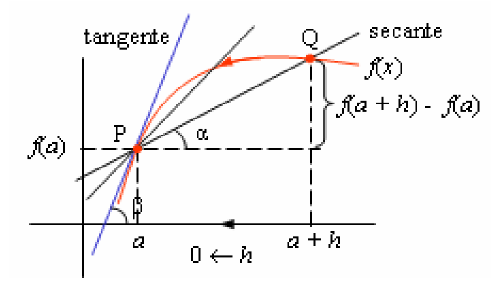



Tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo [$a$, $b$] se define como

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La *TVM* da la variación unitaria de $f(x)$ entre $a$ y $b$.

La *TVM* coincide con la tangente del ángulo α que da la pendiente de la recta secante a la curva $f(x)$ que pasa por los puntos P y Q de ella.




Derivada de una función en un punto

La función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$

si existe el límite: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Mide la tasa de variación instantánea en el punto. Este límite recibe el nombre de $f'(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.

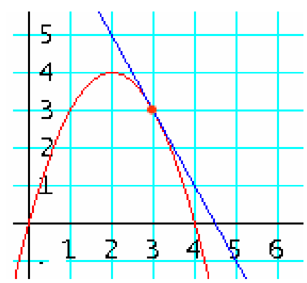
**Ejemplo:** Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, su derivada en el punto $x = 3$ vale

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}.$$

Como $f(3+h) = -(3+h)^2 + 4(3+h) = -h^2 - 2h + 3$ y $f(3) = 3$, se tendrá:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 2h + 3 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-h-2)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h-2) = -2.$$

Luego, $f'(3) = -2$.




Interpretación geométrica de la derivada

La derivada, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P = (a, f(a))$.

La ecuación de dicha recta tangente será: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

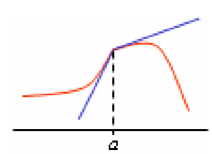
**Ejemplo**: La recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto de abscisa x = 3, será: $y' - f(3) = f'(3)(x - 3)$.

Y como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$ se obtiene: $y - 3 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 9$

Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.

Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:

1. Que la función sea continua en dicho punto.
2. Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.




Geométricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.

Las derivadas laterales no coinciden en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.

- La relación entre derivabilidad y continuidad es la siguiente:

  "si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$"

El recíproco no es cierto. Esto es, $f(x)$ es continua en $x = a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$.

Reglas de derivación para las operaciones con funciones

**1.** Derivada de una constante por una función:

$$F(x) = k \cdot f(x) \ \rightarrow \ (F(x))' = (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

**2.** Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$F(x) = f(x) + g(x) \ \rightarrow (F(x))' = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

**3.** Derivada de un producto de funciones:

$$F(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \ \rightarrow (F(x))' = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**4.** Derivada de la opuesta de una función:

$$F(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \ \rightarrow (F(x))' = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

**5.** Derivada de un cociente de funciones:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \rightarrow \ (F(x))' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

**6.** Derivada de la función compuesta:

$$F(x) = f(g(x)) \ \rightarrow \ (F(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

| TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS | | | |
|---|---|---|---|
| **Función simple** | **Derivada** | **Función compuesta** | **Derivada** |
| $y = c$ | $y' = 0$ | | |
| $y = x$ | $y' = 1$ | | |
| $y = x^n$, $\forall\, n \in \mathbf{R}$ | $y' = nx^{n-1}$ | $y = (f(x))^n$, $\forall\, n$ | $y' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $y = \sqrt{f(x)}$ | $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ |
| $y = a^x$, $a > 0$ | $y' = a^x \ln a$ | $y = a^{f(x)}$, $a > 0$ | $y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \ln a$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ | $y = e^{f(x)}$ | $y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$ |
| $y = \log_a x$ | $y' = \frac{1}{x} \log_a e$ | $y = \log_a f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ | $y = \ln f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ |
| $y = \operatorname{sen} x$ | $y' = \cos x$ | $y = \operatorname{sen} f(x)$ | $y' = f'(x) \cos f(x)$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\operatorname{sen} x$ | $y = \cos f(x)$ | $y' = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$ |
| $y = \operatorname{tag} x$ | $y' = 1 + \operatorname{tag}^2 x$ | $y = \operatorname{tag} f(x)$ | $y' = f'(x)(1 + \operatorname{tag}^2 f(x))$ |
| $y = \operatorname{arcsen} x$ | $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $y = \operatorname{arcsen} f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}$ |
| $y = \arccos x$ | $y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $y = \arccos f(x)$ | $y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}$ |
| $y = \operatorname{arctag} x$ | $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ | $y = \operatorname{arctag} f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}$ |

Notación: La función derivada suele denotarse: $f'(x)$; $y' = f'(x)$; $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ o $y' = \frac{dy}{dx}$.