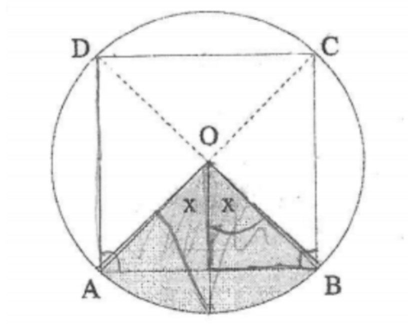
MA1001-3 Introducción al Cálculo, Otoño 2023
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 14 Preparación C6 Exponencial, Logaritmo y Límite de Funciones

Lunes 29 de Junio de 2023

P1. ***[Calcular Límite]*** Considere la circunferencia de centro O y radio r de la figura en la que se ha inscrito el rectángulo ABCD.



Se pide calcular:
$$\lim_{\widehat{AB}\to 0} \frac{\bigcirc\{AOB\}}{\square\{ABCD\}}$$

P2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x} = \text{no existe} \clubsuit$

P3. $\lim\limits_{x\to 0} cos(x)^{\frac{1}{sen^2(x)}}$

P4. ***[Constante Euler-Mascheroni]BRÍGIDO***

Demuestre que $X_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ e $Y_n = X_n - \dfrac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

P5. Calcule los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x) - x}{1 - \cos(x) + 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

P6. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$ tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L > 0$. Pruebe que:

$$\exists\delta > 0, \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > 0$$

Departamento de Ingeniería Matemática
MA1001-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Felipe Lopecillo Rocabado

Límite de funciones

Resumen

- **Notación**. Para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y una sucesión $(x_n)_n$, denotaremos $(x_n)_n \subseteq A$ para decir que $x_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$.

- **Punto de acumulación**. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Diremos que $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A si existe una sucesión infinita en A convergente a $\bar{x}$, es decir, si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \neq \bar{x}\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to \bar{x}$.

  Denotaremos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A.

- **Definición de límite de funciones vía sucesiones**. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Entonces diremos que:

  $$\boxed{L = \lim_{x\to\bar{x}} f(x) \quad \iff \quad f(x_n) = y_n \to L\ \forall \text{ sucesión infinita } (x_n)_n \subseteq A \text{ tal que } x_n \to \bar{x}}$$

  De este modo, diremos que el límite **no existe** si:

  - $\bar{x} \notin A'$,
  - Existe una sucesión $(x_n)_n \subseteq A$ tal que $x_n \to \bar{x}$ pero la sucesión $(f(x_n))_n$ no converge.
  - Existe un par de sucesiones $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq A$ tal que $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{x}$, pero las sucesiones $(f(x_n))_n$ y $(f(y_n))_n$ convergen a distintos límites, es decir:

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

- **Definición de límite** $\varepsilon - \delta$. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Entonces diremos que:

  $$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = L \quad &\iff \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]\backslash\{\bar{x}\}) \cap A : |f(x) - L| \leq \varepsilon) \\ &\iff \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in ([x-\delta, \bar{x}) \cup (\bar{x}, \bar{x}+\delta]) \cap A : |f(x) - L| \leq \varepsilon) \\ &\iff \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < |x-\bar{x}| \leq \delta : |f(x) - L| \leq \varepsilon) \end{aligned}}$$

- **Unicidad del límite**. El límite de una función, si existe, es único.

- **Límites a través de subconjuntos**. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y sea $B \subseteq A$. Definimos $f|_B$ (f restringido a B) tal que $Dom(f|_B) = B$ y $f|_B(x) = f(x)\ \forall x \in B$. Se define entonces, para $\bar{x} \in B' \subseteq A'$, el límite a través de B como:

  $$\lim_{\substack{x\to\bar{x} \\ x\in B}} f(x) = \lim_{x\to\bar{x}} f|_B(x)$$

- **Teorema**. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sean además $B, C \in \mathbb{R}$ tal que $A = B \cup C$, y sea $\bar{x} \in B' \cap C'$.
  Entonces: $\boxed{L = \lim_{x\to\bar{x}} f(x) \text{ existe} \quad \iff \quad L = \lim_{\substack{x\to\bar{x} \\ x\in B}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\bar{x} \\ x\in C}} f(x) \text{ existen (y son iguales)}}$

- **Límites laterales**. Son el caso particular más usado de límites a través de subconjuntos. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Considerando entonces: $A^+ = A \cap (\bar{x}, \infty)$, $A^- = A \cap (-\infty, \bar{x})$, entonces se pueden definir los límites laterales como:

Límite por la derecha: $\lim\limits_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in A^+}} f(x)$

Límite por la izquierda: $\lim\limits_{x \to \bar{x}^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in A^-}} f(x)$

De esta manera, para $L \in \mathbb{R}$ la definición $\varepsilon - \delta$ queda:

$\lim\limits_{x \to \bar{x}^+} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta] \cap A : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A$ tal que $0 < x - \bar{x} \leq \delta : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$
$\lim\limits_{x \to \bar{x}^-} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x}) \cap A : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A$ tal que $0 > x - \bar{x} \geq -\delta : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$

- **Límites hacia infinito**. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $L \in \mathbb{R}$.
  - Si A es no acotado superiormente, entonces diremos que:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in [m, \infty) \cap A : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A$ tal que $x \geq m : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$

  - Si A es no acotado inferiormente, entonces diremos que:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in (-\infty, m] \cap A : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A$ tal que $x \leq m : \lvert f(x) - L \rvert \leq \varepsilon)$

  - Observación: Se tiene que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(-x)$.

- **Límites infinitos**. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A'$. Diremos que:

$\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = \infty$	$\iff$	$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}) \cap A : f(x) \geq M)$
$\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = -\infty$	$\iff$	$(\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}) \cap A : f(x) \leq M)$

Observación: Se tiene que $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x \to \bar{x}} (-f(x)) = \infty$.

- **Asíntotas**. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.
  - **Asíntotas horizontales**: Para $L \in \mathbb{R}$, diremos que la recta $y = L$ es asíntota horizontal de f si A es no acotado (superior y/o inferiormente) y:

$$\boxed{L = \lim_{x \to \infty} f(x), \text{ o bien, } L = \lim_{x \to -\infty} f(x)}$$

    Una función tiene a lo más dos asíntotas horizontales.
  - **Asíntotas verticales**: Para $\bar{x} \in A'$, diremos que la recta $x = \bar{x}$ es asíntota vertical de f si alguno de los siguientes se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \infty, & \lim\limits_{x \to \bar{x}^-} f(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x \to \bar{x}^+} f(x) = -\infty, & \lim\limits_{x \to \bar{x}^-} f(x) = -\infty \end{array}}$$

  - **Asíntotas oblicuas**: Para $m, n \in \mathbb{R}$, diremos que la recta $y = m \cdot x + n$ es asíntota horizontal de f si A es no acotado (superior y/o inferiormente) y:

$$\boxed{\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - m \cdot x), \qquad \text{o bien} \\ \\ m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x) \end{array}}$$

Al igual que el caso horizontal, una función tiene a lo más dos asíntotas oblicuas. Es más, el caso $m = 0$ coincide con el caso de asíntota horizontal.

- **Límites igual a L^+ o L^-**. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con A no acotado superiormente, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^+$	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in [m,\infty) \cap A : 0 \leq f(x) - L \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A$ tal que $x \geq m : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
	$\iff$	$(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L) \wedge (\exists m > 0)(\forall x \in A$ tal que $x \geq m : f(x) > L)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^-$	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in [m,\infty) \cap A : 0 \geq f(x) - L \geq -\varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A$ tal que $x \geq m : L \geq f(x) \geq L - \varepsilon)$
	$\iff$	$(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L) \wedge (\exists m < 0)(\forall x \in A$ tal que $x \geq m : f(x) < L)$

- **Álgebra de límites**. Sean f, g dos funciones y $\bar{x} \in (Dom(f))' \cap (Dom(g))'$ tal que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x)$ existen. Entonces se tiene que:
  - $\lim\limits_{x\to\bar{x}}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) + \lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x)$.
  - $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x)$.
  - $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x)$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.
  - $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x)}{\lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x)}$, si $\lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x) \neq 0$.

  Es importante señalar que estas propiedades son también válidas para $\lim\limits_{x\to\bar{x}^+}$, $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ siempre y cuando se cumpla la existencia de todos los límites asociados.

- **Límite de la composición o Cambio de variable**. Sea $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y sean $\bar{x} \in A'$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{u} = \lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x) = \bar{u}$. Sea además $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{u} \in B'$ cumple que $L = \lim\limits_{x\to\bar{u}} f(x) = L$. Entonces se tiene que:

$$\boxed{\lim_{x\to\bar{x}}(f \circ g)(x) = L}$$

  Este teorema sirve como cambio de variable: Se tiene que:

$$\boxed{\lim_{x\to\bar{x}} f(g(x)) = \lim_{u\to\bar{u}} f(u)}$$

  para el cambio de variable $u = g(x)$, con $\bar{u} = \lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x)$. Este teorema sólo es válido si todos los límites asociados existen. Además, también es válido para $\lim\limits_{x\to\bar{x}^+}$, $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ siempre y cuando se cumpla la existencia y compatibilidad de todos los límites asociados.

- **Sandwich en funciones**. Sean f, g y h tres funciones y $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} h(x) = L$. Si $\exists\delta > 0$ tal que:

$$\forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \cap Dom(g) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

  entonces $\lim\limits_{x\to\bar{x}} h(x) = L$.

  Este teorema también es válido para $\lim\limits_{x\to\bar{x}^+}$, $\lim\limits_{x\to\bar{x}^-}$, $\lim\limits_{x\to\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ siempre y cuando se cumplan las hipótesis adaptadas a las funciones asociadas.

Tabla de definiciones de límite

$\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = L$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < \lvert x - \bar{x}\rvert \leq \delta : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^+} f(x) = L$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} f(x) = L$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = \infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < \lvert x - \bar{x}\rvert \leq \delta : f(x) \geq M)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : f(x) \geq M)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} f(x) = \infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : f(x) \geq M)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : f(x) \geq M)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : f(x) \geq M)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M < 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < \lvert x - \bar{x}\rvert \leq \delta : f(x) \leq M)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^+} f(x) = -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M < 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : f(x) \leq M)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} f(x) = -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M < 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : f(x) \leq M)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M < 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : f(x) \leq M)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall M < 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : f(x) \leq M)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = L^+$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < \lvert x - \bar{x}\rvert \leq \delta : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^+} f(x) = L^+$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} f(x) = L^+$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^+$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L^+$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = L^-$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < \lvert x - \bar{x}\rvert \leq \delta : L - \varepsilon \leq \lvert f(x) - L\rvert \leq L)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^+} f(x) = L^-$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : L - \varepsilon \leq \lvert f(x) - L\rvert \leq L)$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}^-} f(x) = L^-$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : L - \varepsilon \leq \lvert f(x) - L\rvert \leq L)$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^-$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : L - \varepsilon \leq \lvert f(x) - L\rvert \leq L)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L^-$	$\Longleftrightarrow$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : L - \varepsilon \leq \lvert f(x) - L\rvert \leq L)$

Tablas de límites conocidos

- Límites asociados a la continuidad: Sea $\bar{x}$ en el dominio de la función a la que se le quiere calcular el límite. Se tiene entonces que:

$\lim\limits_{x\to\bar{x}} c = c$	$\lim\limits_{x\to\bar{x}} a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n \bar{x}^n + \ldots + a_1\bar{x} + a_0$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} x = \bar{x}$	$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \dfrac{a_n \bar{x}^n + \ldots + a_1\bar{x} + a_0}{b_m \bar{x}^m + \ldots + b_1\bar{x} + b_0}$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(\bar{x})$	$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \cos(x) = \cos(\bar{x})$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \operatorname{arc\,sen}(x) = \operatorname{arc\,sen}(\bar{x})$	$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \arccos(x) = \arccos(\bar{x})$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \arctan(x) = \arctan(\bar{x})$	$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\bar{x}}$
$\lim\limits_{x\to\bar{x}} e^x = e^{\bar{x}}$	$\lim\limits_{x\to\bar{x}} \ln(x) = \ln(\bar{x})$

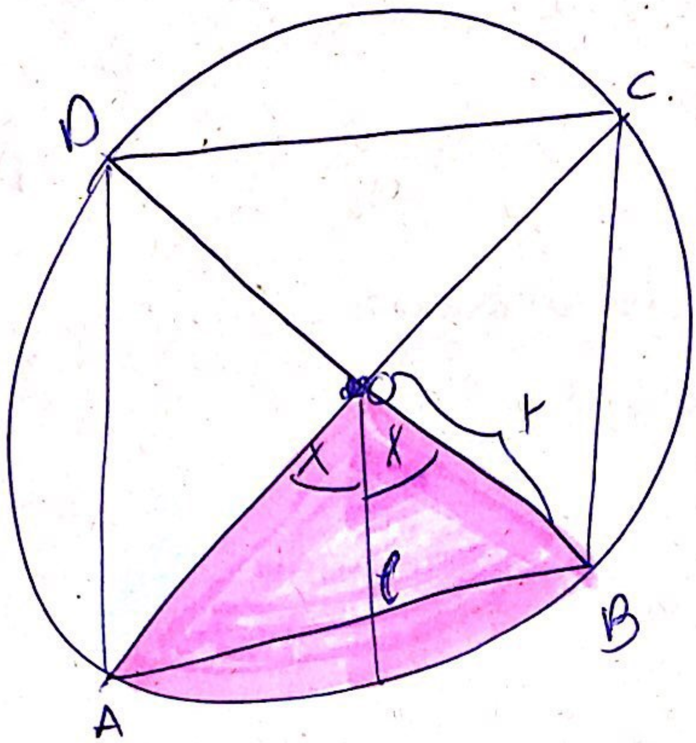
- Límites asociados a la diferenciabilidad: Los siguientes límites no triviales son conocidos:

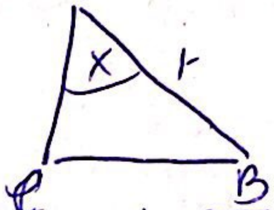
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

- Otros límites: A partir de los gráficos y propiedades de las funciones, se puede probar fácilmente que:

$\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$
$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}^-$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}^+$

P2)-





$\operatorname{sen}(x) = \frac{\overline{eB}}{r}$

A' $\triangleleft$ AOB , fórmula general área sector circular $\frac{1}{2}\theta r^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r^2(2x) = A \triangleleft AOB$$

$$A' \square ABCD = AB \cdot BC = 4 \operatorname{sen}(x)\cos(x)\, r^2$$

$$AB = 2\overline{eB} = 2\operatorname{sen}(x)\cdot r$$

$$BC = 2\overline{eO} = 2\cos(x)\cdot r$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{A \triangleleft AOB(x)}{A \square ABCD(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\, \cancel{r^2}\cdot \cancel{2}x}{4\operatorname{sen}(x)\cos(x)\cdot \cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4}\cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]}\cdot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{4} //$$

P1) MA1001 - 2012 (P1 b)

Demuestre usando la definición.

I) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = +\infty$

Recordemos $\forall M>0, \exists m>0, \forall x \geq m, f(x) = x^3 \geq M$

Lo que no entrego

$f(x) = x^3 \leq M \quad / \sqrt[3]{\ }$

$\Rightarrow \quad x \leq \sqrt[3]{M}$ → relación directa con x

$\Rightarrow$ si $m = \sqrt[3]{M}$

Lo que entrego

En efecto dado la definición basta tomar $\underbrace{m = \sqrt[3]{M}}_{\text{Existe}}$, $M>0$ $\forall M$

Luego esto queda $\forall x \geq \sqrt[3]{M}$

$x^3 \geq \left(\sqrt[3]{M}\right)^3 = M$

$\Leftrightarrow f(x) \geq M$ ■

II) Demostrar $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

Sabemos que si el límite existe ∃ es único

Sea $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ $x_n \to 0^+$

$v_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ $v_n \to 0^+$

Luego $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(1/1/(2n\pi+\pi/2)\right)$

cambia porque tiende $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = 0 \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} (2n\pi + \pi/2) = 1$ $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}$

1) Evaluar $\Rightarrow 1^{1/0}$

2) Matraca

\# Propiedad consistencia. $e^{\ln(a^n)} = a^n$; siempre que e^x y $\ln(x)$ estén bien definidas.

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(\cos(x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \ln(\cos(x))\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{\ln(\cos(x))}{1-\cos^2(x)}\right]$$

luego $h = \cos(x)$, si $x \to 0$

$h \to 1$

$$= \lim_{h\to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{1-h^2}\right] = \lim_{h\to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{-(h-1)(1+h)}\right]$$

Por continuidad de e^x y $\ln(x)$ puede entrar el límite, además de alg de límites

$$= \exp\left[\lim_{h\to 1} \frac{\ln(h)}{h-1} \cdot \frac{-1}{1+h}\right] = \exp\left[1 \cdot \frac{-1}{1+1}\right] = e^{-\frac{1}{2}} \quad //$$

Veamos

X_n y su crecimiento, como bien recordamos se realiza a través de la diferencia entre 2 términos consecutivos de la sucesión

$$X_{n+1} - X_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Sabemos que si $x > 0$

$$\Rightarrow \ln(x) \leq x - 1$$

$$\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1$$

$$= \frac{1 + n - n - 1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow \quad X_{n+1} - X_n \leq 0$, X_n decreciente.

Veamos si está acotada

$$X_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln(m)$$

Por desigualdad del log

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \cancel{1} + \frac{1}{k} - \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1$$

Entonces $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1$ sumamos hasta $m-1$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \ln k+1 - \ln k$$

$$= \cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln(2)} + \dots \cancel{\ln m-1} - \cancel{\ln m-2} + \ln m - \cancel{\ln m-1}$$

$$= -\cancel{\ln(1)}^{0} + \ln(m) = \ln(m).$$

$$\Rightarrow \ln(n) \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$0 \le \frac{1}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = x_n$$

$0 \le x_n$ Es ACOTADA!

Entonces por TSM converge. (Este límite le llaman de Euler Masheloni

Veamos $(y_n) = x_n - \frac{1}{n}$ / lim

$y_n \le x_n$ / lim

$\lim y_n \le \gamma$ es acotada.

Veamos crecimiento

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - x_n + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n}$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} - \ln(n+1) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \ln(n) + \frac{1}{n}$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$1 - \frac{n+1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad / + \frac{1}{n}$$

$$1 - 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} = y_{n+1} - y_n$$

Como es creciente es acotada superiormente y por TSM converge

Luego $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ / lim

$$\lim y_n = \lim x_n - \cancel{\lim \frac{1}{n}}^{\to 0}$$

$$\lim y_n = \lim x_n$$

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl