MA1001-3 Introducción al Cálculo, Otoño 2023
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 12: Preparación C5 Sucesiones, Exponencial y Logaritmo

Lunes 4 de Junio de 2023

P1. Calcule el siguiente límite de sucesiones:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (e^{\frac{1}{n}})^i$$

P2. Sea u_n la sucesión definida por recurrencia de la siguiente forma para $a > b > 0$:

$$u_0 = a + b, u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$$

Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > a$ y que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, calculando $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

P3. ***[Calcular Límites]*** Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{k+n})^2$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+4}\right)^n$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}, a \neq b$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, a, b > 0$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + 100n^2 + 3}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln(1 + e^n + e^{2n} + e^{3n})$

P4. ***[Sándwich]***
Usando que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para todo $a > 0$ y el Teorema del Sándwich, calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n + 5^n + 3^n}$$

P5. ***[Calcular límite]*** Calcule.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

PAUTA AUXILIAR 12 (INTRO AL CÁLCULO)

JAVIER SANTIDRIÁN SALAS

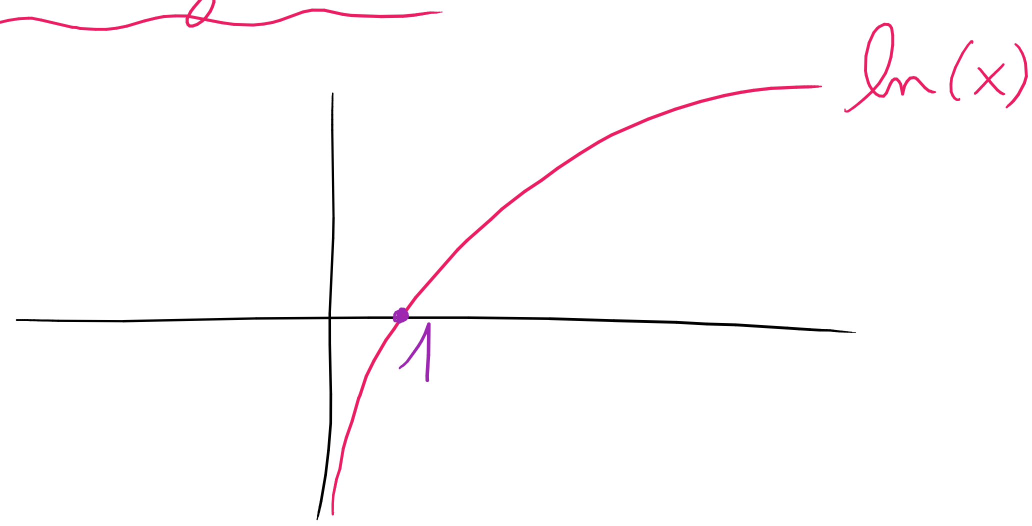
Función Exponencial

RESUMEN:

Desigualdades Fundamentales (útil para Sandwich):

- $\exp(x) \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}, \quad \forall x < 1$

Función Logaritmo



Propiedad muy útil:

- $\exp(\ln(x)) = x, \quad \forall x > 0$
- $\ln(\exp(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Desigualdades Fundamentales (útil para Sandwich)

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1, \quad \forall x > 0$$

P1 Calcule [redacted] EL siguientes límites de sucesiones:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n}\right)^i$$

Sol: Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ arbitrario.
Notar que $0 < \frac{1}{n} < 1$, luego por las desigualdades fundamentales de $\exp(\cdot)$:

$$1 < 1+\frac{1}{n} \leq \exp\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

$$\underset{\forall i\in\{1,\dots,n\}}{\Longrightarrow} \left(1+\frac{1}{n}\right)^i \leq \exp\left(\frac{1}{n}\right)^i \leq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^i$$

(pues $F(x) = x^i$ es creciente para $x > 1$)

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^i \leq \sum_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\right)^i \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^i$$

$$\underset{\cdot\frac{1}{n}}{\Longrightarrow} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^i}_{(A)} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\right)^i \leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^i}_{(B)} \qquad (\star)$$

Notar que:

$$(A) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^i - \left(1+\frac{1}{n}\right)^0\right) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^0 \to 1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^i - \frac{1}{n}$$

$$\underset{(\Sigma\text{ geom})}{=} \frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)-1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\frac{\left(\frac{(n+1)^{n+1}-n^{n+1}}{n^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\cancel{n}}\right)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}-n^{n+1}}{n^{n+1}} - \frac{1}{n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} - 1 - \frac{1}{n}$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to\exp(1)}\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big) - 1 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e - 1$$

Además:

$$(B) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^i - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^0\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^i - \frac{1}{n}$$

$$\underset{\Sigma\text{ geom.}}{=} \frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)-1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{n^{n+1}-(n-1)^{n+1}}{(n-1)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\cancel{n}-\cancel{n}+1}{n-1}\right)} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} - 1\right) - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}} - 1\right) - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} - \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^n}_{\to\exp(-1)}} - 1 + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e^{-1}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{e}} - 1 = e - 1.$$

$\therefore$ tomando $\lim_{n\to\infty}$ en $(\star)$ se concluye por Sandwich que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\right)^i = e - 1 \quad \blacksquare$$

P2) $a > b > 0$.

$u_0 = a+b$, $u_{n+1} = a+b-\frac{ab}{u_n}$

PDQ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > a$ Y QUE (u_n) CONVERGE, CALCULANDO $\lim_{n\to\infty} u_n$.

SOL:

• $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > a$: POR INDUCCIÓN:

CASO BASE: PDQ $u_0 > a$.

EN EFECTO, $u_0 = a+b \underset{b>0}{>} a$.

PASO INDUCTIVO: SEA $n\in\mathbb{N}$ ARBITRARIO TQ $u_n > a$ (HIPÓTESIS INDUCTIVA).

PDQ $u_{n+1} > a$.

EN EFECTO, COMO $u_n > a > 0$, ENTONCES $\frac{1}{u_n} < \frac{1}{a}$, LO CUAL IMPLICA QUE $-\frac{1}{u_n} > -\frac{1}{a}$. (*)

LUEGO:

$$u_{n+1} = a+b-\frac{ab}{u_n} = a+b-\frac{1}{u_n}\cdot ab$$

$$\underset{(*)}{>} a+b-\frac{1}{\cancel{a}}\cdot \cancel{a}b = a+b-b = a.$$

∴ $u_{n+1} > a$, LO QUE PRUEBA POR INDUCCIÓN QUE $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > a$.

• (u_n) CONVERGE:

SABEMOS QUE $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > a$

$\Rightarrow (u_n)$ ES ACOTADA INFERIORMENTE (POR $a>0$)

LUEGO SI PROBAMOS QUE (u_n) ES DECRECIENTE ($u_{n+1} \le u_n$) ENTONCES SE TENDRÁ POR EL TEOREMA DE LAS SUCESIONES MONÓTONAS QUE (u_n) CONVERGE.

VEAMOS QUE (u_n) ES EFECTIVAMENTE DECRECIENTE:

$$u_{n+1} - u_n = a+b-\frac{ab}{u_n} - u_n$$

$$= \frac{(a+b)u_n - ab - u_n^2}{u_n}$$

$$= -\frac{u_n^2-(a+b)u_n+ab}{u_n}$$

$$= -\frac{\overbrace{(u_n-a)}^{>0 \text{ (PUES } u_n>a)}\overbrace{(u_n-b)}^{>0 \text{ (PUES } u_n>a>b)}}{\underbrace{u_n}_{>0 \text{ (PUES } u_n>a>b>0)}} < 0$$

∴ $u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ ES DECRECIENTE (ESTRICT.)

$\underset{\text{TEO SUC MONÓTONAS}}{\Rightarrow} (u_n)$ CONVERGE, DIGAMOS A $L\in\mathbb{R}$ (ES DECIR $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$)

• CALCULE $\lim_{n\to\infty} u_n$ (OSEA CALCULEMOS L):

SABEMOS QUE $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = a+b-\frac{ab}{u_n}$$

$$\underset{\lim_{n\to\infty}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(a+b-\frac{ab}{u_n}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{ALG DE LÍMITES} \\ ((u_n)\text{ CONVERGE})}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = a+b-\frac{ab}{\lim_{n\to\infty} u_n}$$

$$\underset{\left(\substack{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \\ \Rightarrow u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L}\right)}{\Longrightarrow} L = a+b-\frac{ab}{L}$$

$$\underset{\cdot L}{\Longrightarrow} L^2 = (a+b)\cdot L - ab$$

$$\Rightarrow L^2-(a+b)\cdot L + ab = 0$$

$$\Rightarrow (L-a)(L-b) = 0$$

$$\Rightarrow L = a \lor L = b \quad (\Delta)$$

PERO $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > a > b > 0$

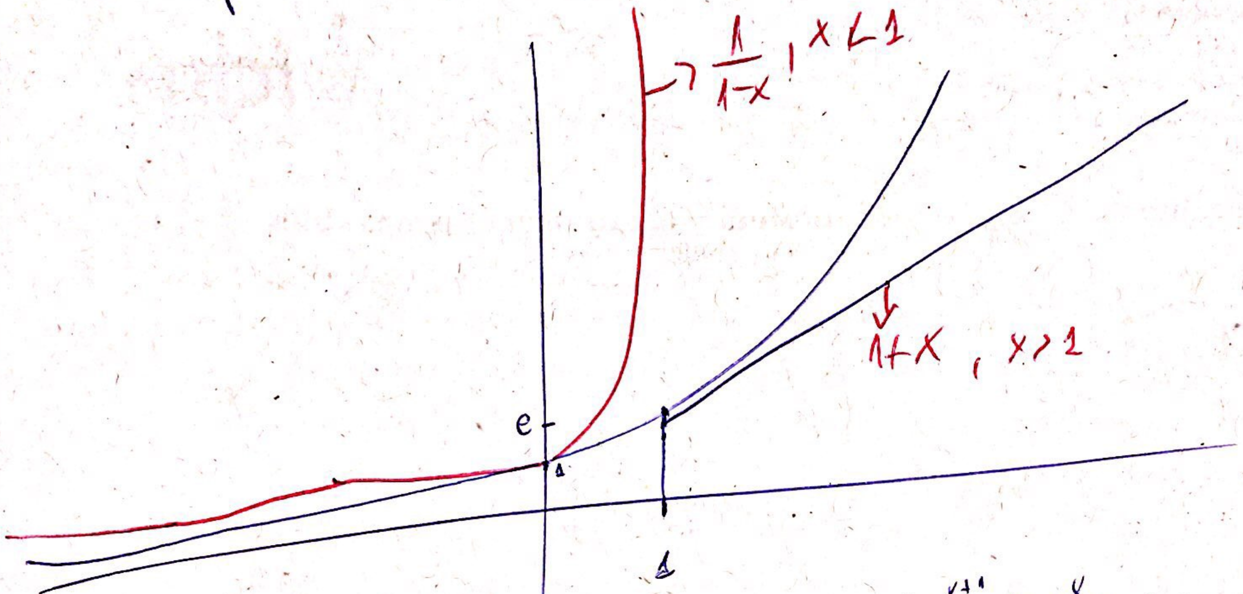
$$\underset{\lim_{n\to\infty}}{\Longrightarrow} \underbrace{\lim_{n\to\infty} u_n}_{L} \ge a > b > 0$$

$$\Rightarrow L \ge a > b > 0$$

LUEGO ES IMPOSIBLE QUE $L=b$ (PUES $L>b$) ∴ LA ÚNICA POSIBILIDAD DE ACUERDO A (Δ) ES QUE $L=a$

∴ $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ ///

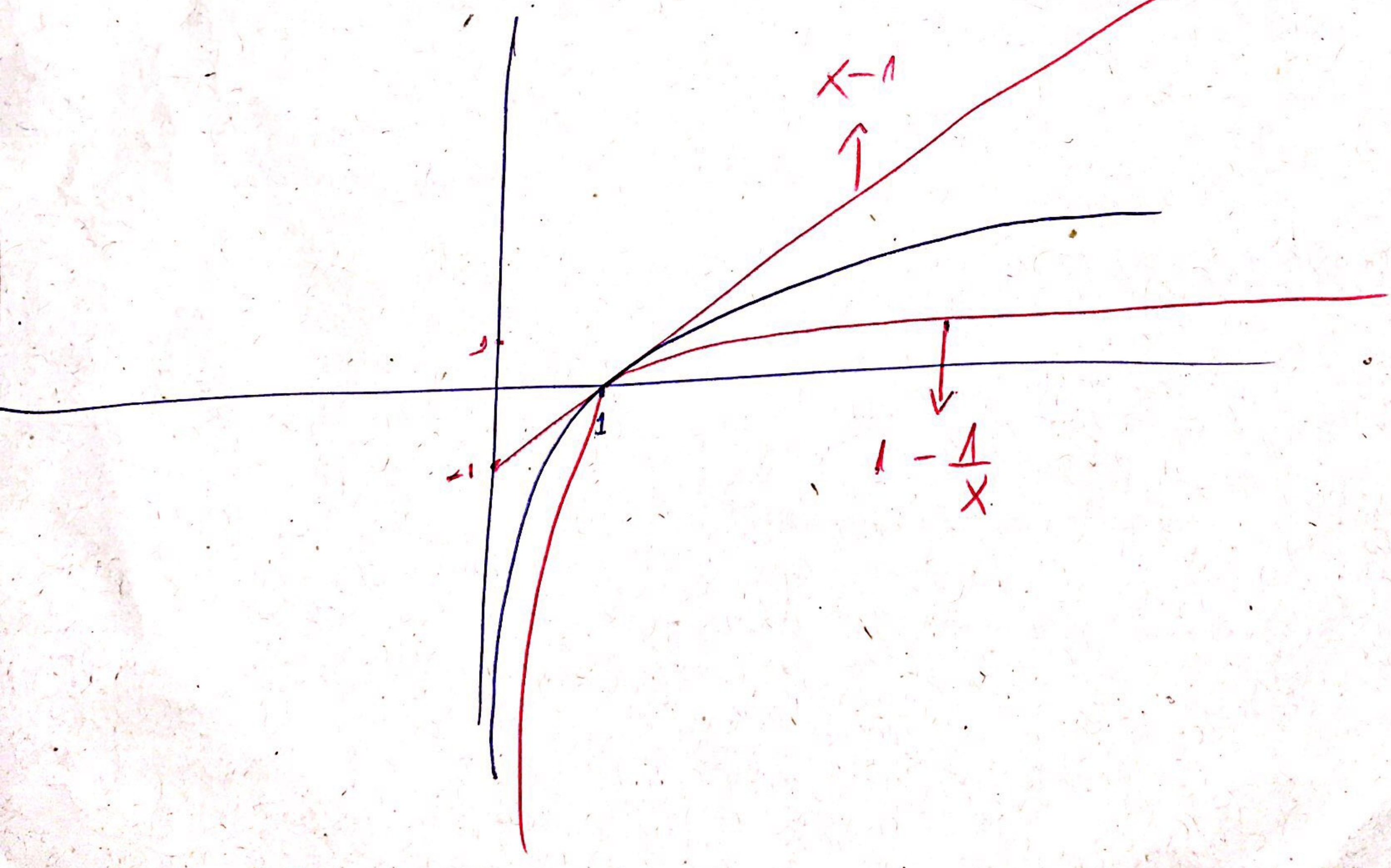
Exp



$e^x \leq e^{x+1} \leq e^x e$

$\mathbb{R}^+$ $\quad \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$

ln(x)



Teorema Bernoulli I.

I) $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall h > -1)\ (1+h)^m \geq 1 + mh.$

Sucesión Importante.

q^m, 1) $\lim q^m = 1$, si $q = 1$

2) $\lim q^m = 0$, si $|q| < 1$

3) $\lim q^m$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

$\sqrt[m]{a}$, $a \in (0, \infty)$

$\sqrt[m]{a} \to 1$, $\forall a \in (0, \infty)$.

Bernoulli II

II) $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall h > 0)\ (1+h)^m \geq 1 + mh + \frac{m(m-1)}{2} h^2$

$\sqrt[m]{m} \to 0$

III $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, \frac{1}{m}))$, $(1+u)^m \leq \frac{1}{1 - mu}$

TEOREMA S [redacted].

Def: Sea (S_m), si $\forall m \geq m_0$ $S_{m+1} \geq S_m$ creciente.

- Sea (S_n), si $\forall n \geq n_0$, $S_{n+1} \leq S_n$ decreciente.

TSM

Si (S_n) es sucesión (estrictamente) creciente o decreciente a partir de un n_0 y acotada superiormente o inferiormente respectivamente, entonces converge.

Límite conocido 1) $e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Teorema $\forall x \in \mathbb{R}$ la sucesión $S_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ converge.

La fución exponencial:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$

$\forall x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ Very Important.

$\Rightarrow$ $\boxed{1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \ \forall x,\ x<1}$

La función logaritmo:

$\forall x \in (0, \infty)$ $1-\frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$

- Para $a > 0$

$$a^x = e^{(x \ln(a))}$$

$\log_a x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

exponencial y su continuidad

$$\lim e^{a_n} \to e^a$$

$\lim \left(\dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - n} \right) \to e^a$

- Versión log.

1) $\lim \ln(a_n) \to \ln a$
2) $\left(\dfrac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \right) \to \dfrac{1}{a}$

Scanned with CamScanner

P1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

notamos

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)\right]$$

telescópica! #intuición

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \dots + \cancel{\ln(n)} + \cancel{\ln(n-1)} + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}\right]$$

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\ln(n+1) - \ln(1)\right] = \lim \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{1}\right)$$
$$= \lim \ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right) \overset{\text{Álgebra}}{=} \ln\left(\lim \sqrt[n]{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow = \ln(1) = 0 \,//$$

i) $\lim \frac{1}{n} \ln (e^{n} + e^{2n} + e^{3n} + 1)$

Esta expresión llamada ▼

Recordemos que $\ln$ es creciente, Así que si quito o sumo positivos ocurre lo usual !!

$$\frac{1}{n} \ln e^{3n} \quad ▼ \leq \frac{1}{n} \ln [4e^{3n}]$$

$$= \frac{3n}{n} \qquad = \frac{1}{n}[(\ln 4) + \ln (e^{3n})]$$

$$= 3 \qquad = \frac{\ln(4)}{n} + 3$$

→ constante.

Al aplicar Límite

$$3 \leq \lim ▼ \leq \cancel{\lim \frac{\ln(4)}{n}}^{0} + 3$$

Por Teorema Sándwich.

ii) $X_n = \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n$

Es del tipo $(q_n)^n$, entonces

estudiemos $\lim q_n = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1$

Entonces

$$X_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n \longrightarrow 0$$

iii) $y_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$

Es del tipo $\sqrt[n]{a_n}$

y por ii $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \quad y_n \longrightarrow 1$

iv) $\lim \frac{a^n + b}{a^n - n}$

Si $a \in (0,1) = a^n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n+b}{a^n-n} = \lim \frac{a^n+b}{a^n-n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{0} + \cancel{\frac{b}{n}}^{0}}{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{0} - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Recordando que $a_n \in (0,1)$ al elevarlo lo voy disminuyendo cada vez más.

Si $a > 1$

$$1 > \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n + b}{a^n - n} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim \frac{1 + \frac{b}{a^n}}{1 - \frac{n}{a^n}}$$

$$= \lim \frac{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot b}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n n}$$

Al igual que el caso anterior, recordamos q^n, si $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n \to 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{1 + \cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n b} \to 0}{1 - \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot n}}_{|q|^n \cdot n^k \text{ Apunte, gana exponencial}} \to 0} = \frac{1}{1} = 1$$

- $X_n \to l \iff \lim\limits_{n\to\infty} X_n = l \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \mid |X_n - l| < \varepsilon$.

$\forall n \geq n_0$ Siempre!

- X_n nula si $X_n \to 0$.
- X_N acotada si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \mid |X_n| \leq M$.

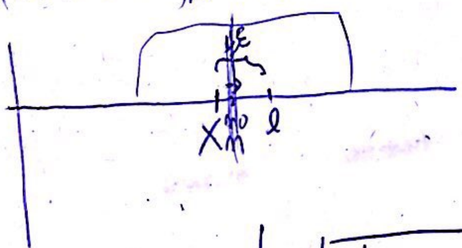
$\iff -M \leq X_n \leq M$.

- Teorema: Si (S_n) es una sucesión que converge a $l_1 \in \mathbb{R}$ y también $l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow l_1 = l_2$

P1)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$

$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N}) / |X_n - l| \leq \varepsilon$, + $\forall n \geq n_0$ } Definición



$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$

$\sqrt{\alpha} \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \infty+]$

$\alpha = \frac{1}{n} + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \geq 0 + 1$ Toda raíz es ⊕ o 0

Además $\frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+1} \geq 1}_{} \geq 0 \quad /+(-1)$$

Sumo ambos lados -1, y tomo la desigualdad de la izq

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1 \geq 0$$

Entonces $n \neq 0$

$$\Big|\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1}_{\geq 0}\Big| \leq \varepsilon$$

\# Lo que está dentro de $|\cdot|$ siempre ≥ 0.

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1 \leq \varepsilon \quad /+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} \leq \varepsilon+1 \quad /()^2$$

Por que?

$f(n) = \sqrt{\frac{1}{n}+1} \geq 0 \land \varepsilon+1 \geq 0$

$\Rightarrow g(x) = x^2 / g: \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0$

\# Biyectiva, sólo cuando cumplo esto puedo elevar al cuadrado

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} + 1 \leq (\varepsilon+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \underbrace{(\varepsilon+1)^2 - 1}_{\geq 0} \quad /\cdot n > 0$$

$$1 \leq ((\varepsilon+1)^2 - 1)n$$

$$\frac{1}{(\varepsilon+1)^2 - 1} \leq n$$

\# Una vez que tengo una cota de n, puedo encontrar un n_0 a partir del cual converge

basta tomar $\underbrace{\left\lfloor \frac{1}{(\varepsilon+1)^2 - 1} \right\rfloor}_{} + 1 = n_0$

La función cajón me asegura que es natural y el $+1$ me asegura que se cumple, recordemos que es a partir de n_0

PDQ: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$.

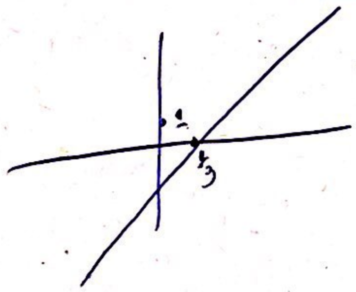
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left| \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon.$ } Definición

$\frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2(3n-1)}{3(3n-1)} = \frac{3(2n+3) - 6n + 2}{3(3n+1)}$, tomo lo de adentro para ver como se comporta.

$= \frac{11}{\underbrace{3}_{+}\underbrace{(3n-1)}}$ } $+$

$\forall n \geq 1$

$\hookrightarrow$ Es una función lineal que es positiva a partir de $\frac{1}{3}$.



pues en particular $n \geq 1 \geq \frac{1}{3}$

Por lo que si $n \geq 1 \Rightarrow \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \geq 0$

$\Rightarrow \left| \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{11}{3(3n-1)} \leq \varepsilon$ $\quad 3n+1 \geq 0$, si $n \geq \frac{1}{3}$

todo ≥ 0

$\Leftrightarrow \frac{1}{3n+1} \leq \frac{3\varepsilon}{11} \Leftrightarrow 11 \leq 3\varepsilon(3n+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 11 \leq 3\varepsilon(3m+1)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{3\varepsilon} - 1 \leq 3m$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11 - 3\varepsilon}{9\varepsilon} \leq m$ Encontré una cota.

basta tomar $\overbrace{\left\lfloor \frac{11 - 3\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rfloor}^{\in \mathbb{N}} + 1 = m_0$. ↗ $m \in$ Asegura que se tiene.

$\therefore \lim_{m \to \infty} \frac{2m+3}{3m+1} = \frac{2}{3}$ tomamos la convergencia

[CONTRADICCIÓN]

iii) Supongamos que converge ¡Para demostrar.

PDQ $\lim_{m \to \infty} m^2+1 = x_m$ diverge !!

Si converge $\exists l \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0 \; |m^2+1-l| \leq \varepsilon$ Definición de convergencia

Como es $\forall \varepsilon > 0$

en particular $\varepsilon = 1$ debe cumplir # Todos los elementos del conjunto lo cumplen.

$m^2 + \cancel{1} - l \leq \cancel{1} \quad \forall m \geq m_0$

$\Leftrightarrow \quad m^2 \leq l \quad / \forall m \geq m_0 \; l > 0 \quad / \sqrt{\ } \Rightarrow$ Biyectiva

$\Rightarrow \quad m \leq \sqrt{l}, \quad \forall m \geq m_0$

Los naturales son acotados :(

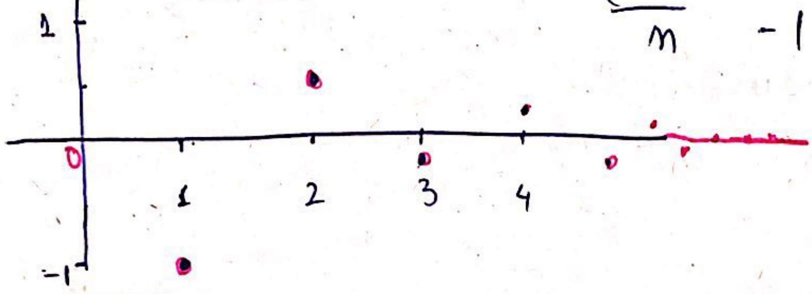
Sea $M = \max\{x_1, x_2, \ldots x_{m_0}, \sqrt{l}\}, \forall m \geq m_0, m \leq M$ ⨯

Scanned with CamScanner

d) $\lim_{n\to\infty} \max\left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ $\quad n \neq 0$

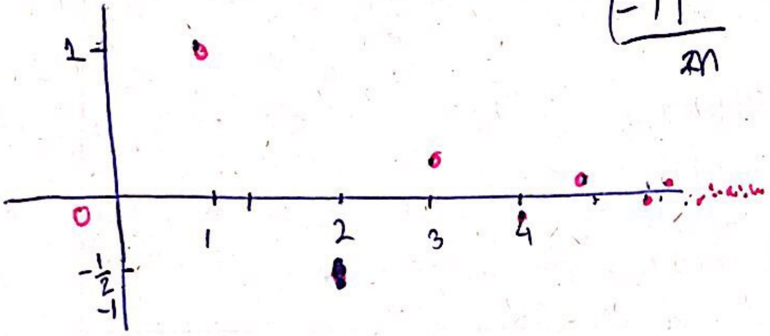
Veamos su comportamiento.

$\frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$



$$\max\left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$$

$$n=1 \quad \left\{ \max\{-1, 1\}, \overset{n=2}{\max}\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}, \overset{n=3}{\max}\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\} \dots \right\}$$

$$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \right\} = \frac{1}{n}$$

su lím conocido y convergencia a igual

Pero esto es sólo la intuición !! !!

∀ la vida.

Golazo de media cancha

$$\max\{A, B\} = \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2}$$

Propiedad que me permite calcular el máximo de manera algebraica. $\min\{A,B\} = \frac{A+B}{2} - \frac{|A-B|}{2}$

$$\max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}{2} + \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}{2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2n}\cancel{\left[1 - 1\right]}^{\to 0} + \left|\frac{(-1)^n}{2n}\left[1 + 1\right]\right|$$

$|(-1)^n| = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1 \dots\}$ si le tomo valor absoluto siempre es 1.

$$= \frac{|(-1)^n| \cdot 2}{2n} = \frac{1}{n} \quad ///$$

Su límite y convergencia lo tomamos de un comienzo, por prop arquimediana.

[Si y, es un número real y, $x>0$ Existe un entero positivo tq $nx>y$]

\# Cualquier número por grande que sea, existe un natural que multiplicado por un positivo x es mayor! El caso del apunte es el caso particular de $y = 1$.

P2 | Calcular los límites

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n \cdot \frac{(\sqrt{n^2+n} + n)}{(\sqrt{n^2+n} + n)}$ } 1 conveniente

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ } 1 conveniente

Alg Límites

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\text{por P1} \to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{1/n \to 0}} = \frac{\lim_{n\to 0} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

Yo aplico ~~[illegible]~~ todo el límite al mismo tiempo.

b) $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k+m}\right)^2$

$\alpha_1^2 \geq 0 \;,\; \alpha_2^2 \geq 0 \;\ldots\; \alpha_m^2 \geq 0$

$\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_i^2 \geq 0$

A una fracción le quito elementos positivos del denominador

$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k+m}\right)^2 \leq \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{m}\right)^2$

$0 \leq \qquad = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{m} 1 \quad \Big\} \; \sum$ constante.

$0 \leq \qquad = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m^2} \cdot (m-1+1) \cdot 1$

$0 \leq \qquad = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{k+m}\right)^2 = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

$$n! = \underbrace{n\,(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}_{(n-1)\text{ elementos}}$$

$\leq n \quad \leq n \quad \leq n$

Como son elementos menores o iguales a n, si los reemplazo por n, será una cota superior,

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \lim \frac{n!}{n^n} \leq \lim \frac{1}{n}$$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{n!}{n^n} \to 0.$$

d) $\lim \dfrac{2^n+1}{n^2\cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^2\cdot 3^{n+1}} + \dfrac{1}{n^2\cdot 3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{nula}}\cdot \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} \Rightarrow$$

2 veces, sucesión nula

acotada → Teorema nula por acotada

q^n, $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n \to 0.$

$$\lim \frac{2^n+1}{n^2\cdot 3^{n+1}} = 0$$

e) $\lim \underbrace{\left(\frac{3n-1}{2n+4}\right)}_{S_n}^{n}$

$\lim S_n = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim (S_n)^n = \infty$ por apunte.

divege $= \Delta$

$$\frac{2^n}{n^2 3^{n+1}} \leq \frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}} \leq \frac{2^n+2^n}{n^2 3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n^2 \cdot 3^{n+1}} \Big/ \sqrt[n]{}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}} \leq \frac{\sqrt[n]{2} \cdot 2}{\sqrt[n]{n^2} \cdot 3 \cdot \sqrt[n]{3}}$$

$\downarrow$ $2/3$ $\qquad$ $\downarrow$ $2/3$

i)

mayor elemento

$100m^2 \leq 100m^3$

$3 \leq 3m^3$

$$m^3 \leq m^3 + 100m^2 + 3 \leq m^3 + \overbrace{100m^3 + 3m^3} \quad / \sqrt[n]{\ }$$

$$\sqrt[n]{m^3} \leq \sqrt[n]{m^3 + 100m^2 + 3} \leq \sqrt[n]{104} \cdot \sqrt[n]{m^3}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

Por Teorema Sándwich

//

P3)

Sea (a_n) se que existe $\lim_{n\to\infty} n a_n$. Dem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

#Indicación

Si $X_n \to l$, y se tiene $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus f(n) \geq n \Rightarrow X_{f(n)} \to l$

$f(n) = \bar{n} \geq n \geq n_0$

$\Rightarrow \ \to l$

#Indicación

Si $X_n \to l$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \ |X_n - l| < \varepsilon$ (1) Definición

Veamos que si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\underline{f(n) \geq n}$ *

↳ creciente como $n+1$, n^2+1000 etc.

$\Rightarrow X_{f(n)} \to l$,

PDQ.

$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0') \ \underbrace{|X_{f(n)} - l| < \varepsilon}$ lo que quiero.

Nosotros sabemos que dado $\varepsilon > 0$

$|X_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ (2)

luego si $n_0' = n_0$

$\Rightarrow f(n_0') \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n_0')} - l| < \varepsilon$

Además si $\underline{n \geq n_0' = n_0}$

$\Rightarrow f(n) \geq n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n)} - l| < \varepsilon$ //

$n \cdot a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$

PDQ $a_n \to 0$

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n' \geq n) : |a_n - 0| > 0|$

ε fijo

$n' = f(n) \geq n$

(Para cada n $\exists n' \geq n$

$|a_{f(n)} - 0| > \varepsilon$

$\nLeftarrow$ Se tiene $\underline{|a_{f(n)}| > \varepsilon}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Indicación

Acá use la indicación ! !

Pero.

$\underbrace{a_n \cdot n}_{} \to l \Rightarrow f(n) \cdot a_{f(n)} \to l$

$c_n \to l \Rightarrow c_{f(n)} \longrightarrow l$

$\Rightarrow c_n$ acotada pues converge

pero

$|c_n| = |f(n) \cdot a_{f(n)}| = |f(n)||a_{f(n)}| \geq f(n) \cdot \varepsilon$

$\geq n \cdot \varepsilon$

$|c_n| \geq n \cdot \varepsilon \to \infty$

P4.

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{xn} + 5^{xn} + 3^{n}}}$$

Si bien $7^{n}, 5^{n}, 3^{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 7$$

$$= 7 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 7^{n} + 7^{n}}$$

$$7 \leq \qquad \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{7^{n}}$$

$$7 \leq \qquad \leq \cancel{\lim_{n\to\infty}}\ 1 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}} \;//$$

P5)

a) Se hizo antes !!!

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$

Recordemos

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} \xrightarrow{} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+1\right)^{n^2+1-1}$$

parte a)

$$\xrightarrow{} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+1\right)^{n^2+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{e}{1} \quad //$$

P6 Caso base $n=2$.

$a_1 \in (0,1)$

$a_0 \in (0,1)$ $\qquad a_2 = \frac{a_1}{2}(1+a_0^2)$

$\Rightarrow 0 < a_0 < 1$

$0 < a_0^2 < 1 \quad /+1$

$0 < 1 < a_0^2+1 < 2 \quad /\cdot \frac{1}{2}$

$0 < \frac{a_0^2+1}{2} < 1 \quad /\cdot a_1$

$0 < \frac{(a_0^2+1)}{2} a_1 < 1$ //

Inducción fuerte

Asumo k cumple

HI $\cancel{a_{k}} \in (0,1)$ $\Rightarrow$ $a_{k+1} = a_k \frac{(1+a_{k-1}^2)}{2} \in (0,1)$

$a_k \in (0,1)$

$a_{k+2} = a_{k+1}\frac{(1+a_k^2)}{2}$ $\Big|$ $0 < 1 < a_k^2+1 < 2 \quad /\frac{1}{2}$

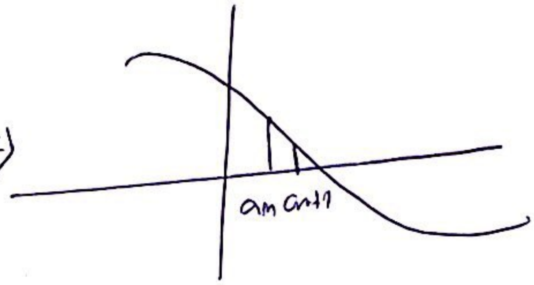
$0 < \frac{a_k^2+1}{2} < 1 \quad /\cdot a_{k+1}$

$0 < a_{k+1}\frac{(a_k^2+1)}{2} < 1$. $\square$

ii) notar $a_{n+1} = a_n \dfrac{(a_{n-1}^2+1)}{2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}^2+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow$$



Sucesión decreciente y acotada, por lo que converge.

iii) Como existe límite, yo puedo decir $\lim a_n = l$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim a_{k-1} \frac{(1+a_{k-2}^2)}{2}$$

$$l = \lim a_n = \lim \frac{a_{k-1}}{2} + \lim \frac{a_{k-2}^2 \cdot a_{k-1}}{2} = \lim a_{k-1}$$

$$\Rightarrow l = \frac{l}{2} + \frac{(l^2)l}{2} \Rightarrow 0 = \frac{l}{2}\left[l^2 - 1\right]$$

Es importante estudiar los casos y descartar los demás

$\Rightarrow l = 0$ | $l \neq 1$ ∨ decreciente

$\Rightarrow l = \pm 1$ | $\Rightarrow l = 0$

$l \neq -1$ $a_n \notin [0,1]^c$

P7 |

Sea una sucesión creciente

$u_m \uparrow$

$v_m \downarrow$

$\lim (u_m - v_m) = 0.$

PDQ: $\lim u_m = \lim v_m = l.$

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0 \mid u_m - v_m - 0 \mid < \varepsilon$

Si $\varepsilon = 1$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq m_0$

$-1 < \underline{u_m - v_m < 1} \quad / + v_m$

$\Rightarrow u_m < 1 + v_m < 1 + v_{m_0}$, $\exists m_0$

Entonces

Como $u_m \nearrow$ y acotada $\Rightarrow \exists \lim u_m$

Por TSM.

$\cdot -1 / \quad 1 > \underbrace{-u_m + v_m > -1}$

$\Rightarrow v_m > u_m - 1 > \underline{u_{m_0} - 1} \Rightarrow \exists \lim v_m$

Como $v_m \downarrow$ y acotada Por TSM.

$\lim U_n - V_n = 0$

$\lim U_n - \lim V_n = 0$

$\lim U_n = \lim V_n$ //

Sólo puedo hacer este paso porque cada uno tiene lím por separado.

Sea s_n sucesión acotada   # Ejercicio Adicional de control.

$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \le M$

I) Dem $\forall n > M$ $\quad \dfrac{1}{n+s_n} \le \dfrac{1}{n-M}$

$\longrightarrow$

$\underbrace{-M \le s_n} \le M$

$-M \le s_n \quad / + n$

$n - M \le s_n + n \quad / ( )^{-1}$ # ojo la desigualdad

$\dfrac{1}{n-M} \ge \dfrac{1}{s_n+n}$ //

II) $\dfrac{1}{n+s_n} \to 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+s_n} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0 \left| \dfrac{1}{n+s_n} - 0 \right| < \varepsilon$

$\left| \dfrac{1}{n+s_n} \right|$, $\dfrac{1}{n+s_n} \le \dfrac{1}{n-M} < \varepsilon$, $n > M$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} < \dfrac{1 \cdot (n-M)}{} \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} + M$

basta $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} + M \right\rfloor + 1$, $\forall n \ge n_0 \ge M$ $\left| \dfrac{1}{n+s_n} \right| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n+s_n} \to 0$

$\lim a_n = \lim \frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2}{2n+1}$

$= \lim n^2 \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$

$= \lim n^2 \left(\frac{\cancel{2n}+1 - \cancel{2n}+1}{4n^2-1}\right) = \lim \frac{2n^2}{4n^2-1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2}{4-\frac{1}{n^2}}$

$= \frac{\cancel{\lim 2}^{2}}{\cancel{\lim 4} - \cancel{\lim \frac{1}{n^2}}^{0}}$

$= \frac{1}{2}$

luego si $\frac{1}{n \cdot a_n}$, entonces se va a 0 por parte anterior.

a_n converge $\Rightarrow$ acotada

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl