PAUTA TUTORÍA PREPARACIÓN C4

JAVIER SANTIDRIÁN SALAS

CONJUNTOS FINITOS

A ES FINITO SI $\exists n \in \mathbb{N}$ y $\exists f : A \to \{1, \dots, n\}$ BIYECTIVA. DIREMOS QUE $A = \{a_1, \dots, a_n\} = \{a_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ Y QUE $|A| = |\{1, \dots, n\}| = \underbrace{n}_{\text{ÚLTIMO}} - \underbrace{1}_{\text{PRIMERO}} + 1 = n$

PROPIEDADES: SEAN A Y B CONJUNTOS FINITOS. ENTONCES:

i) $A = \emptyset \iff |A| = 0$

ii) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

iii) $A \subseteq B \Rightarrow$
- $|B \setminus A| = |B| - |A|$
- $|A| \leq |B|$

P1 CALCULE EL CARDINAL DE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS FINITOS:

a) $A=\{2^{i+1}: i\in\{0,\dots,m\}\}\ (=\{2^1,2^2,2^3,\dots,2^{m+1}\})$

SOL: COMO LOS TÉRMINOS DE A SOLO DEPENDEN DE $i\in\{0,\dots,m\}$, ENTONCES A TENDRÁ TANTOS ELEMENTOS COMO VALORES POSIBLES DE i, ES DECIR:

$$|A|=|\{0,\dots,m\}|=m-0+1=m+1$$

OBSERVACIÓN: EN LOS CONTROLES QUIZÁS LES TRATAN DE COMPLICAR LA VIDA, Y EN VEZ DE ESCRIBIR $i\in\{0,\dots,m\}$ PUEDEN ESCRIBIR POR EJEMPLO $i\in\mathbb{N}$, $0\leq i<m+1$. LO IMPORTANTE ES QUE SIEMPRE LO LLEVEN A LA NOTACIÓN DE CONJUNTO PARA PODER CONTAR BIEN LOS ELEMENTOS.

b) $B=\left\{\frac{2^{i+1}}{3^j}: i\in\{0,\dots,m\}, j=0\right\}$

SOL: LOS TÉRMINOS SOLO DEPENDEN DE i ($j=0$ ESTÁ FIJO), DE HECHO: $B=\left\{\frac{2^{i+1}}{3^0}: i\in\{0,\dots,m\}\right\}$.
LUEGO POR LO VISTO EN a): $|B|=|\{0,\dots,m\}|=m-0+1=m+1$.

c) $C=\left\{\frac{2^{i+1}}{3^j}: i\in\{0,\dots,m\}, j\in\{0,1\}\right\}$

SOL: AHORA SÍ LOS TÉRMINOS DEPENDEN DE i Y DE j (TIENEN VALORES DISTINTOS CUANDO TOMO $j=0$ ~~o~~ $j=1$). SE PUEDE SEPARAR EL CONJUNTO DE ACUERDO A ESTAS DOS POSIBILIDADES DE VALORES PARA j Y HACER QUE CADA CONJUNTO NUEVO DEPENDA SOLO DE i (UNA SOLA VARIABLE):

$$C=\left\{\frac{2^{i+1}}{3^j}: i\in\{0,\dots,m\}, j=0\right\}\cup\left\{\frac{2^{i+1}}{3^j}: i\in\{0,\dots,m\}, j=1\right\}$$
$$=\underbrace{\left\{\frac{2^{i+1}}{3^0}: i\in\{0,\dots,m\}\right\}}_{C_0\ (j=0)}\cup\underbrace{\left\{\frac{2^{i+1}}{3^1}: i\in\{0,\dots,m\}\right\}}_{C_1\ (j=1)}=\bigcup_{j=0}^{1}\underbrace{\left\{\frac{2^{i+1}}{3^j}: i\in\{0,\dots,m\}\right\}}_{C_j}$$

$$\Rightarrow |C|=|C_0\cup C_1|\overset{\text{PROPIEDAD}}{=}|C_0|+|C_1|-|C_0\cap C_1| \quad (*)$$

ES DIRECTO QUE $|C_0|=|C_1|=|\{0,\dots,m\}|=m-0+1=m+1$ (PUES SON CONJUNTOS CUYOS ELEMENTOS SOLO DEPENDEN DE LA VARIABLE $i\in\{0,\dots,m\}$).

AHORA VEAMOS QUE $C_0\cap C_1=\emptyset$. EN EFECTO, SI SUPONEMOS POR CONTRADICCIÓN QUE $C_0\cap C_1\neq\emptyset$, ENTONCES $\exists x\in C_0\cap C_1$, ES DECIR $x\in C_0$ Y $x\in C_0$, LO CUAL POR DEFINICIÓN DE C_0 Y C_1 SIGNIFICA QUE $\exists i_1\in\{0,\dots,m\}$ TQ $x=\frac{2^{i_1+1}}{3^0}\in C_0$ Y QUE $\exists i_2\in\{0,\dots,m\}$ TQ $x=\frac{2^{i_2+1}}{3^1}\in C_1$

$$\Rightarrow \frac{2^{i_1+1}}{3^0}=x=\frac{2^{i_2+1}}{3^1}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{i_1+1}}{\cancel{3^0}\to 1}=\frac{2^{i_2+1}}{\cancel{3^1}\to 3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2^{i_1+1}}_{\in\mathbb{N}}=\frac{2^{i_2+1}}{3}\notin\mathbb{N}$$ (3 NUNCA DIVIDE A UNA POTENCIA DE 2)

$\therefore C_0\cap C_1=\emptyset \overset{\text{PROPIEDAD}}{\Rightarrow} |C_0\cap C_1|=0$

$$\underset{\text{EN }(*)}{\Rightarrow} |C|=|C_0\cup C_1|=|C_0|+|C_1|=2(m+1)$$

d) P2 a) C4 2017-1:

$$D=\{2i+1: i\in\mathbb{N}, 0\leq i<2^{m-1}, m\in\{1,\dots,m\}\}$$

SOL: CON LO QUE VIMOS ANTES DEBEMOS PRIMERO LLEVAR TODAS LAS VARIABLES A NOTACIÓN DE CONJUNTO:

$$D=\{2i+1: i\in\{0,\dots,2^{m-1}-1\}, m\in\{1,\dots,m\}\}$$

NOTAR QUE LA VARIABLE i DEPENDE DEL VALOR DE $m\in\{1,\dots,m\}$, POR LO TANTO SEPARAMOS SEGÚN LAS POSIBILIDADES PARA m:

$$D=\underbrace{\{2i+1: i\in\{0,\dots,2^{1-1}-1\}\}}_{D_1\ (m=1)}\cup\dots\cup\underbrace{\{2i+1: i\in\{0,\dots,2^{m-1}-1\}\}}_{D_m\ (m=m)}$$
$$=\bigcup_{m=1}^{m}\underbrace{\{2i+1: i\in\{0,\dots,2^{m-1}-1\}\}}_{D_m}$$

ES DIRECTO NUEVAMENTE QUE $\forall m\in\{1,\dots,m\}$:
$$|D_m|=|\{0,\dots,2^{m-1}-1\}|=(2^{m-1}-1)-0+1=2^{m-1} \quad (**)$$

PERO NOTAR QUE:

$m=1\to D_1=\{2i+1: i\in\{0,\dots,\cancel{2^{1-1}}\to 1-1\}\}$
$=\{2i+1: i\in\{0\}\}=\{2\cdot\underset{i=0}{0}+1\}$

$m=2\to D_2=\{2i+1: i\in\{0,\dots,\cancel{2^{2-1}}\to 2-1\}\}$
$=\{2i+1: i\in\{0,1\}\}=\{2\cdot\underset{i=0}{0}+1, 2\cdot\underset{i=1}{1}+1\}$

$m=3\to D_3=\{2i+1: i\in\{0,\dots,\cancel{2^{3-1}}\to 4-1\}\}$
$=\{2i+1: i\in\{0,1,2,3\}\}$
$=\{2\cdot\underset{i=0}{0}+1, 2\cdot\underset{i=1}{1}+1, 2\cdot\underset{i=2}{2}+1, 2\cdot\underset{i=3}{3}+1\}$

$\vdots$

$\Rightarrow D_1\subseteq D_2\subseteq D_3\subseteq\dots\subseteq D_m \quad (***)$
(NO ES NECESARIO PROBARLO POR INDUCCIÓN PARA EFECTOS DE ESTA PREGUNTA, SOLO SEÑALARLO)

$$\Rightarrow D=\bigcup_{m=1}^{m}D_m=D_1\cup D_2\cup D_3\cup\dots\cup D_m\overset{(***)}{=}D_m$$

$$\Rightarrow |D|=|D_m|\overset{(**)}{=}2^{m-1}$$

e) P2 b) C4 2017-1:

$$E=\left\{\frac{2i+1}{2^m}: i\in\mathbb{N}, 0\leq i<2^{m-1}, m\in\{9,10\}\right\}$$

SOL: SEPARAMOS IGUAL QUE ANTES SEGÚN EL VALOR DE $m\in\{9,10\}$ (PUES i DEPENDE DE m):

$$E=\underbrace{\left\{\frac{2i+1}{2^9}: i\in\{0,\dots,\cancel{2^{9-1}}\to 2^8-1\}\right\}}_{E_9\ (m=9)}\cup\underbrace{\left\{\frac{2i+1}{2^{10}}: i\in\{0,\dots,\cancel{2^{10-1}}\to 2^9-1\}\right\}}_{E_{10}\ (m=10)}$$

$$\underset{\text{PROPIEDAD}}{\Rightarrow} |E|=|E_9\cup E_{10}|=|E_9|+|E_{10}|-|E_9\cap E_{10}| \quad (\Delta)$$

ES DIRECTO QUE:
$$|E_9|=|\{0,\dots,2^8-1\}|=(2^8-1)-0+1=2^8$$
$$|E_{10}|=|\{0,\dots,2^9-1\}|=(2^9-1)-0+1=2^9$$

AHORA VEAMOS QUE $E_9\cap E_{10}=\emptyset$.
EN EFECTO, SUPONGAMOS POR CONTRADICCIÓN QUE $E_9\cap E_{10}\neq\emptyset$. LUEGO $\exists x\in E_9\cap E_{10}$, ES DECIR $x\in E_9$ Y $x\in E_{10}$. ESTO IMPLICA QUE $\exists i_9\in\{0,\dots,2^8-1\}$ TQ $x=\frac{2i_9+1}{2^9}\in E_9$ Y $\exists i_{10}\in\{0,\dots,2^9-1\}$ TQ $x=\frac{2i_{10}+1}{2^{10}}\in E_{10}$.

$$\Rightarrow \frac{2i_9+1}{2^9}=x=\frac{2i_{10}+1}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{2i_9+1}{2^9}=\frac{2i_{10}+1}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{10}}{2^9}(2i_9+1)=2i_{10}+1$$

$$\Rightarrow \underbrace{2(2i_9+1)}_{\text{PAR}}=\underbrace{2i_{10}+1}_{\text{IMPAR}}$$

$\therefore E_9\cap E_{10}=\emptyset \underset{\text{PROPIEDAD}}{\Rightarrow} |E_9\cap E_{10}|=0$

$$\underset{\text{EN }(\Delta)}{\Rightarrow} |E|=|E_9|+|E_{10}|=2^8+2^9$$

Control 4

P1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) (3,0 pts.) Calcule (en función de n y sin usar inducción)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}.$$

Solución: Se comienzan usando fracciones parciales sobre $\frac{2}{k(k+2)}$ para escribirlo como una suma de dos términos. Así, imponemos que

$$\frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2)+bk}{k(k+2)} = \frac{(a+b)k+2a}{k(k+2)}$$

Deducimos entonces que $(a+b)k + 2a = 2$. Como lo anterior debe ser válido para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ (porque n es arbitrario), se concluye que $a + b = 0$ y que $2a = 2$, de donde se obtiene que $a = 1$ y $b = -1$. Por lo tanto,

$$\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}.$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) && \text{(Fracciones parciales – } \textbf{0.6 pts}\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) && \text{(Resta y suma de } \tfrac{1}{k+1} \text{ – } \textbf{0.6 pts}\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) && \text{(Sumatoria de dos secuencias – } \textbf{0.6 pts}\text{)} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{n+2}\right) && \text{(Propiedad telescópica – } \textbf{0.9 pts}\text{)} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. && \text{(Reordenación – } \textbf{0.3 pts}\text{)}
\end{aligned}$$

b) (3,0 pts.) Calcule (en función de n y sin usar inducción)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 5^k.$$

<u>Indicación:</u> Recuerde que $\frac{1}{j}\binom{m-1}{j-1} = \frac{1}{m}\binom{m}{j}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Solución: Usando la indicación con $m = n+1$ y $j = k$, obtenemos que

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}5^k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}5^k && \text{(Reemplazo – } \textbf{0.3 pts}\text{)}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}5^k && \text{(Factorización de constantes – } \textbf{0.3 pts}\text{)}\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}5^k - \binom{n+1}{0}5^0 - \binom{n+1}{n+1}5^{n+1}\right)\\
& && \text{(Sumar y restar } \tbinom{n+1}{0}5^0 + \tbinom{n+1}{n+1}5^{n+1} \text{ – } \textbf{0.9 pts}\text{)}\\
&= \frac{1}{n+1}\left(6^{n+1} - \binom{n+1}{0}5^0 - \binom{n+1}{n+1}5^{n+1}\right) && \text{(Binomio de Newton – } \textbf{0.9 pts}\text{)}\\
&= \frac{1}{n+1}\left(6^{n+1} - 1 - \binom{n+1}{n+1}5^{n+1}\right) && \text{((}\tbinom{n+1}{0}5^0 = 1\cdot 1 = 1 \text{ – } \textbf{0.3 pts}\text{)}\\
&= \frac{1}{n+1}\left(6^{n+1} - 1 - 5^{n+1}\right). && \text{((}\tbinom{n+1}{n+1}5^{n+1} = 1\cdot 5^{n+1} = 5^{n+1} \text{ – } \textbf{0.3 pts}\text{)}
\end{aligned}$$

P2. a) (2,0 pts) Sean $A, B, C \subseteq E$ conjuntos finitos. Pruebe que

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

Solución: *Primera forma (usando la fórmula para el cardinal de la unión de dos conjuntos no necesariamente disjuntos):*
Como $A\cup B$ también es finito, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| &= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| && \text{(Cardinal de la unión – } \textbf{0.4 pts}\text{)}\\
&= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| && \text{(Cardinal de la unión – } \textbf{0.4 pts}\text{)}\\
&= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)|\\
& && \text{(Distributividad de } \cap \text{ sobre } \cup \text{ – } \textbf{0.4 pts}\text{)}\\
&= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap(B\cap C)|)\\
& && \text{(Cardinal de la unión – } \textbf{0.4 pts}\text{)}\\
&= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|)\\
& && \text{((}(A\cap C)\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C \text{ – } \textbf{0.4 pts}\text{)}\\
&= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|. && \text{(Reordenación)}
\end{aligned}$$

Segunda forma (usando la fórmula para el cardinal de la unión disjunta):
Sean

$$\begin{aligned}
X &= (A\cap B)\setminus(A\cap B\cap C)\\
Y &= (A\cap C)\setminus(A\cap B\cap C)\\
Z &= (B\cap C)\setminus(A\cap B\cap C)\\
W &= (A\cap B\cap C).
\end{aligned}$$

Se tiene que:

- X, Y, Z, W, $A \setminus (X \cup Y \cup W)$, $B \setminus (X \cup Z \cup W)$ y $C \setminus (Y \cup Z \cup W)$ son todos disjuntos de a pares y finitos.
- $X \cup W = A \cap B$, $Y \cup W = A \cap C$ y $Z \cap W = B \cap C$, que también son finitos.
- $X \cup Y \cup W \subseteq A$, $X \cup Z \cup W \subseteq B$ e $Y \cup Z \cup W \subseteq C$, que también son finitos.
- $A \cup B \cup C = (A \setminus (X \cup Y \cup W)) \cup (B \setminus (X \cup Z \cup W)) \cup (C \setminus (Y \cup Z \cup W)) \cup X \cup Y \cup Z \cup W$.

Así,

$$
\begin{aligned}
&|A \cup B \cup C| \\
&= |A \setminus (X \cup Y \cup W)| + |B \setminus (X \cup Z \cup W)| + |C \setminus (Y \cup Z \cup W)| + |X| + |Y| + |Z| + |W| \\
&\hfill \text{(Cardinal de la unión disjunta – } \textbf{0.5 pts}\text{)} \\
&= |A| - |X \cup Y \cup W| + |B| - |X \cup Z \cup W| + |C| - |Y \cup Z \cup W| + |X| + |Y| + |Z| + |W| \\
&\hfill \text{(Cardinal de la diferencia – } \textbf{0.5 pts}\text{)} \\
&= |A| - |X| - |Y| - |W| + |B| - |X| - |Z| - |W| + |C| - |Y| - |Z| - |W| + |X| + |Y| + |Z| + |W| \\
&\hfill \text{(Cardinal de la unión disjunta – } \textbf{0.5 pts}\text{)} \\
&= |A| + |B| + |C| - (|X| + |W|) - (|Y| + |W|) - (|Z| + |W|) + |W| \qquad \text{(Reordenación)} \\
&= |A| + |B| + |C| - |X \cup W| - |Y \cup W| - |Z \cup W| + |W| \quad \text{(Cardinal de la unión disjunta – } \textbf{0.5 pts}\text{)} \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \qquad \text{(Reemplazo)}
\end{aligned}
$$

Tercera forma (argumentando informalmente, solo con puntaje parcial): Un argumento informal es el siguiente. Los conjuntos A, B y C no son necesariamente disjuntos, escribir $|A| + |B| + |C|$ estamos "sobrecontando" algunos elementos de $A \cup B \cup C$. Más precisamente,

- todos aquellos elementos que pertenecen a exactamente uno de los conjuntos son contados una sola vez;
- todos aquellos elementos que pertenecen a exactamente dos de los conjuntos son contados dos veces; y
- todos aquellos elementos que pertenecen a los tres conjuntos son contados tres veces.

Por lo tanto, $|A| + |B| + |C|$ en general no es igual $|A \cup B \cup C|$. Para "arreglar" esta fórmula, es necesario restar la cantidad de elementos que se sobrecuentan. Una fórmula más cercana al valor correcto es $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$. En este caso:

- todos aquellos elementos que pertenecen a exactamente uno de los conjuntos son contados una sola vez;
- todos aquellos elementos que pertenecen a exactamente dos de los conjuntos son contados una sola vez, pues aparecen dos veces entre los conjuntos A, B y C, pero una vez entre los conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$; y
- todos aquellos elementos que pertenecen a los tres conjuntos no son contados ninguna vez, pues aparecen tres veces entre los conjuntos A, B y C, y luego tres veces más en los conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

Finalmente, la expresión $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ es correcta, porque arregla el último caso: los elementos que aparecen en los tres conjuntos ahora son contados exactamente una vez. **(1.4 pts por argumentar informalmente que la fórmula es correcta)**

b) Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones de $\{1, \ldots, 10\}$ en $\{1, 2\}$, es decir,

$$\mathcal{F} = \{f \mid f \colon \{1, \ldots, 10\} \to \{1, 2\} \text{ es función}\}.$$

i) (2,0 pts.) Sea $j^\star \in \{1, 2\}$ fijo. Se define el conjunto $F_{j^\star}$ de todas las funciones $f \in \mathcal{F}$ tales que $f(j^\star) = j^\star$, es decir,

$$F_{j^\star} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(j^\star) = j^\star\}.$$

Pruebe que $|F_1| = |F_2| = 512$ y $|F_1 \cap F_2| = 256$.

Solución:
Primera forma: Podemos interpretar los elementos de $\mathcal{F}$ como 10-tuplas en el conjunto $\{1,2\}^{10}$. Explícitamente, la función $\varphi\colon \mathcal{F} \to \{1,2\}^{10}$ dada por $\varphi(f) = (f(1), f(2), \ldots, f(10))$ es biyectiva **(1.0 pts por interpretación como tuplas)**.
Usando lo anterior, se tiene que F_1 corresponde a las 10-tuplas en $\{1,2\}^{10}$ cuya primera coordenada es 1, por lo que hay $2^9 = 512$ tales tuplas. Similarmente, F_2 corresponde a las 10-tuplas en $\{1,2\}^{10}$ cuya segunda coordenada es 2, por lo que también hay $2^9 = 512$ tales tuplas **(0.5 pts por justificar el valor de las cardinalidades de F_1 y F_2)**.
Además, $F_1 \cap F_2$ corresponde a las 10-tuplas en $\{1,2\}^{10}$ cuya primera coordenada es 1 y cuya segunda coordenada es 2, por lo que hay $2^8 = 256$ tales tuplas **(0.5 pts por justificar el valor de la cardinalidad de $F_1 \cap F_2$)**.
Así, $|F_1| = |F_2| = 512$ y $|F_1 \cap F_2| = 256$.

Segunda forma: Podemos interpretar los elementos de F_1 como elementos del conjunto $\mathcal{G} = \{g \mid g\colon \{2,3,\ldots,10\} \to \{1,2\} \text{ es función}\}$. Explícitamente, la función φ que a $f \in F_1$ le asocia $g\colon \{2,3,\ldots,10\} \to \{1,2\}$ tal que $g(i) = f(i)$ para todo $i \in \{2,3,\ldots,10\}$ es una biyección entre F_1 y $\mathcal{G}$ **(1.0 pts por interpretación como conjunto de funciones sobre un dominio restringido)**.
Por resultado conocido, $|\mathcal{G}| = |\{1,2\}|^{|\{2,\ldots,10\}|} = 2^9 = 512$, luego $|F_1| = 512$. Análogamente (por simetría) $|F_2| = 512$ **(0.5 pts por justificar el valor de las cardinalidades de F_1 y F_2)**.
Un argumento similar permite identificar (establecer una biyección) entre $F_1 \cap F_2$ y el conjunto $\mathcal{H} = \{h \mid h\colon \{3,4,\ldots,10\} \to \{1,2\} \text{ es función}\}$ y concluir que $|F_1 \cap F_2| = |\{1,2\}|^{|\{3,\ldots,10\}|} = 2^8 = 256$ **(0.5 pts por justificar el valor de la cardinalidad de $F_1 \cap F_2$)**.

ii) (2,0 pts) Muestre que hay 768 funciones $f \in \mathcal{F}$ tales que $f(1) = 1$ o $f(2) = 2$, es decir, pruebe que

$$|\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \lor f(2) = 2\}| = 768.$$

Solución: Se tiene que

$$\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \lor f(2) = 2\} = F_1 \cup F_2. \qquad \textbf{(1.0 pts)}$$

En efecto, si $f \in \mathcal{F}$ cumple $f(1) = 1 \lor f(2) = 2$, entonces ya sea $f(1) = 1$ (en cuyo caso, $f \in F_1$), o $f(2) = 2$ (en cuyo caso, $f \in F_2$)). Así, $f \in F_1 \cup F_2$.
Recíprocamente, si $f \in F_1 \cup F_2$, entonces ya sea $f \in F_1$ (en cuyo caso, $f(1) = 1$) o $f \in F_2$ (en cuyo caso, $f(2) = 2$), por lo que f pertenece a $\mathcal{F}$ y cumple $f(1) = 1 \lor f(2) = 2$.
Usando la fórmula para el cardinal de la unión, tenemos que

$$|\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \lor f(2) = 2\}| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2|. \qquad \text{(Cardinal de la unión – } \textbf{0.8 pts}\text{)}$$

Por la parte anterior, se tiene que $|F_1| = 512$ y que $|F_1 \cap F_2| = 256$. Por lo tanto,

$$|\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \lor f(2) = 2\}| = 512 + 512 - 256 = 768. \qquad \textbf{(0.2 pts)}$$

Duración: 1h 30'.