**MA1001-3 Introducción al Cálculo, Otoño 2023**
**Profesor:** Leonardo Sánchez Cancino
**Auxiliares:** Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

# Auxiliar 10: Preparación C4 Supremo y Sucesiones

Lunes 22 de Mayo de 2023

**P1.** Demuestre de dos formas distintas que:

$$\frac{2n+1}{n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

**P2.** Sean $\alpha, \beta > 0$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n + \beta)) = L \neq 0$$

Calcule el valor de $\alpha, \beta$ y $L$.

**P3.** ***[Té Supremo ROYAL DARJEELING]***
Sean $\mathbb{A}$,$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}$ conjutnos no vacíos y acotados, pruebe que:

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbf{inf}(\mathbb{B}) \leq \mathbf{inf}(\mathbb{A}) \leq \mathbf{sup}(\mathbb{A}) \leq \mathbf{sup}(\mathbb{B})$$

**P4.** ***[Té Supremo HIERBA LIMÓN FRAMBUESA]***
Sean $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que el conjutno $f(\mathbb{A}) = \{f(x)/x \in \mathbb{A}\}$ tiene ínfimo y supremo, y que:

$$f(\mathbf{sup}(\mathbb{A})) \leq \mathbf{inf}(f(\mathbb{A})) \leq \mathbf{sup}(f(\mathbb{A})) \leq f(\mathbf{inf}(\mathbb{A}))$$

**P5.** ***[Definición Convergencia]*** Demuestre utilizando definición de convergencia.

*a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}+1} = 1$

*b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$

*c)* $\lim_{n\to\infty} n^2+1$ diverge

*d)* $\lim_{n\to\infty} max\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$ calcule su límite y demuéstrelo.


PAUTA AUXILIAR 10
INTRO AL CÁLCULO

JAVIER SANTIDRIÁN SALAS

# RESUMEN DE SUCESIONES

**SUCESIÓN:** LISTA INFINITA DE REALES

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

A VECES TAMBIÉN SE ESCRIBE COMO CONJUNTO

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n : n\in\mathbb{N}\}$$

**CONVERGENCIA:**

A PARTIR DE UN INSTANTE $n_0\in\mathbb{N}$ SUFICIENTEMENTE GRANDE

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |a_n - L| < \varepsilon$$

LA DISTANCIA ENTRE $a_n$ Y $L$ ES MÁS PEQUEÑA QUE CUALQUIER REAL $\varepsilon > 0$

**EJEMPLOS (CLÁSICOS)**

- $\frac{1}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$
- $(-1)^n$ NO CONVERGE

P1/ PDQ $\dfrac{2n+1}{n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ (DE DOS FORMAS DISTINTAS)

SOL: POR DEFINICIÓN DEBEMOS PROBAR QUE

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \left|\frac{2n+1}{n+3}-2\right|<\varepsilon$$

EN EFECTO, SEA $\varepsilon>0$ ARBITRARIO.

NOTAR QUE PARA $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{2n+1}{n+3}-2\right| = \left|\frac{2n+1-2(n+3)}{n+3}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{2n}+1-\cancel{2n}-6}{n+1}\right| = \left|-\frac{5}{n+3}\right|$$

$$= \Bigg|\underbrace{\frac{5}{n+3}}_{\substack{>0\\(n\in\mathbb{N})}}\Bigg| = \frac{5}{n+3} \underset{\substack{\text{RELAJACIÓN}\\\text{(EN GENERAL POR SIMPLICIDAD}\\\text{QUEREMOS SOLAMENTE}\\n\text{ ABAJO)}}}{\leq} \frac{5}{n}$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\frac{2n+1}{n+3}-2\right|\leq\frac{5}{n}$$

QUEREMOS ENCONTRAR $n_0\in\mathbb{N}$ ($\exists n_0\in\mathbb{N}$) TQ SI $n\geq n_0$ ($\forall n\geq n_0$) ENTONCES $\frac{5}{n}<\varepsilon$ $\Big\}$ $(*)$

ACÁ HAY DOS FORMAS DE HACERLO:

① UTILIZANDO LA PROPIEDAD ARQUIMEDIANA:

NOTAR QUE $\frac{\varepsilon}{5}>0$, LUEGO POR PROPIEDAD ARQUIMEDIANA $\exists n_0\in\mathbb{N}$ TQ $n_0\cdot\frac{\varepsilon}{5}>1$.

$$\Rightarrow \frac{5}{n_0}<\varepsilon \qquad (\Delta)$$

CON ESTO, $\forall n\geq n_0$ SE TENDRÁ QUE:

$$\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0} \qquad \text{(DIRECTO PUES } n\geq n_0>0)$$

$$\overset{\cdot 5}{\Rightarrow} \frac{5}{n}\leq\frac{5}{n_0}\underset{(\Delta)}{<}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{5}{n}<\varepsilon$$

ASÍ HEMOS PROBADO $(*)$ $\therefore$ $\dfrac{2n+1}{n+3}\xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ ////

② DESPEJANDO EL $n_0$ EN FUNCIÓN DE $\varepsilon$:

PARA PROBAR $(*)$ NECESITAMOS ENCONTRAR $n_0\in\mathbb{N}$ TQ $\forall n\geq n_0$:

$$\frac{5}{n}<\varepsilon$$

ES DECIR:

$$n>\frac{5}{\varepsilon}$$

PERO RECORDAR QUE $n\in\mathbb{N}$ (Y $\frac{5}{\varepsilon}>0$ NO NECESARIAMENTE), LUEGO LO ANTERIOR ES EQUIVALENTE A:

$$n\geq\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]+1 \qquad \left(\text{RECUERDO: } \forall x>0,\ \underbrace{[x]}_{\in\mathbb{N}}\leq x<\underbrace{[x]+1}_{\in\mathbb{N}}\right)$$

ASÍ, PARA PROBAR $(*)$ TENEMOS QUE ENCONTRAR $n_0\in\mathbb{N}$ TQ $\forall n\geq n_0$ SE CUMPLA QUE:

$$n\geq\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]+1$$

PERO DEFINIENDO $n_0:=\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]+1\in\mathbb{N}$ ENTONCES SE CUMPLE DIRECTAMENTE QUE $\forall n\geq n_0$:

$n\geq\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]+1$ $\therefore$ SE PRUEBA $(*)$ Y CON ELLO

$$\frac{2n+1}{n+3}\xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \text{ ////}$$

P2 | SEAN $\alpha, \beta > 0$ TQ

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{n\left(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n+\beta)\right)}_{S_n} = L \neq 0$$

CALCULE EL VALOR DE $\alpha, \beta, L$.

SOL: NOTAR QUE PARA $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = n\left(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n+\beta)\right)$$

RACIONALIZAR

$$= n\left(\sqrt{n^2+n+1} - (\alpha n+\beta)\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n+\beta)\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n+\beta)\right)}$$

$$= \frac{n\left(n^2+n+1-(\alpha n+\beta)^2\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n+\beta)}$$

$$= \frac{n^2+n+1-(\alpha n+\beta)^2}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1} + (\alpha n+\beta)\right)}$$

$$= \frac{n^2+n+1-\alpha^2n^2-\beta^2-2\alpha\beta n}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n+1} + \frac{1}{n}(\alpha n+\beta)}$$

$$= \frac{n^2(1-\alpha^2)+n(1-2\alpha\beta)+(1-\beta^2)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}(n^2+n+1)} + \alpha + \frac{\beta}{n}}$$

$$= \frac{n^2(1-\alpha^2)+n(1-2\alpha\beta)+(1-\beta^2)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \alpha + \frac{\beta}{n}} =: \frac{a_n}{b_n}$$

NOTAR QUE POR ÁLGEBRA DE LÍMITES:

$$b_n := \sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0}} + \alpha + \underbrace{\tfrac{\beta}{n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{1+0+0}+\alpha+0 = 1+\alpha \quad (\Delta)$$

ADEMÁS, COMO $\frac{a_n}{b_n} = S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \neq 0$

(CUOCIENTE DE SUCESIONES CONVERGE A $L \neq 0$) Y EL DENOMINADOR $b_n$ CONVERGE, ENTONCES POR ÁLGEBRA DE LÍMITES EL NUMERADOR $a_n$ NECESARIAMENTE CONVERGE, ES DECIR:

$$a_n := n^2(1-\alpha^2)+n(1-2\alpha\beta)+(1-\beta^2) \text{ CONVERGE } (*)$$

PERO COMO $n^2$ Y $n$ NO CONVERGEN, NECESARIAMENTE SE DEBE TENER QUE:

$$1-\alpha^2 = 0 \quad \wedge \quad 1-2\alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 1 \quad \wedge \quad \beta = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\underset{\sqrt{(\cdot)}}{\Rightarrow} |\alpha| = 1 \quad \wedge \quad \beta = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\underset{\substack{\alpha>0 \\ \text{(HIPÓTESIS)}}}{\Rightarrow} \boxed{\alpha = 1} \wedge \boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

REEMPLAZANDO ESTO EN $(*)$ Y $(\Delta)$:

- $a_n = 1-\beta^2 = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}$
- $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1+\alpha = 1+1 = 2$

$$\underset{\substack{\text{ALG} \\ \text{DE} \\ \text{LÍMITES}}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3/4}{2} = \frac{3}{8}$$

PERO $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} S_n = L$ (HIPÓTESIS)

LUEGO POR UNICIDAD DEL LÍMITE:

$$\boxed{L = \frac{3}{8}} \blacksquare$$

**P3)** $A\subseteq B \Rightarrow \inf(B)\le \inf(A)\le \sup(A)\le \sup(B)$

En efecto estas cantidades están bien definidas por axioma del supremo y propiedad del ínfimo.
(A, B no vacío y acotados)

Sea $a\in A \Rightarrow a\le \sup(A) \wedge a\ge \inf(A)$

Por transitividad de la desigualdad $\inf(A)\le \sup(A)$

- Quiero ver ahora que ~~$\sup A\le \sup$~~ $\sup(A)\le \sup(B)$

$\forall \varepsilon>0, \exists a\in A, \sup(A)-\varepsilon<a$  

Primero quiero probar $\sup(A)\le \sup(B)$

! ! ! $\Leftrightarrow \sup(A)-\sup(B)\le 0$

Por contradicción supongamos $\sup(A)-\sup(B)>0$

Luego por  se tiene $\forall\varepsilon>0$, en particular

$\sup(A)-\sup(B)=\varepsilon$

$\Rightarrow \exists a\in A \quad \sup(A)-(\sup(A)-\sup(B))<a$

$\sup(B)<a$

$\sup(B) < a$ , para $a \in A \subseteq B \Rightarrow a \in B$.

Entonces tenemos un elemento superior al supremo

No!!!

Porque $\forall x \in X$, $X \neq \emptyset$ y acotado

$\inf(X) \leq x \leq \sup(X)$

$\therefore \sup(A) - \sup(B) \leq 0$

$\sup(A) \leq \sup(B)$ //

Para el caso $\inf(B) \leq \inf(A)$ es análogo

Veamos [redacted] $\inf(B) - \inf(A) \leq 0$

Por contradiccion supongamos $\inf(B) - \inf(A) > 0$

Por propiedad tenemos $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \inf(A) + \varepsilon > a}$

En particular $\varepsilon = \inf(B) - \inf(A)$

$\Rightarrow \exists a \in A, \inf(A) + (\inf(B) - \inf(A)) > a$

$\inf(B) > a$ , $a \in A \subseteq B \Rightarrow a \in B$

$\therefore \inf(B) - \inf(A) \leq 0$

$\Leftrightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$ ∎

$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

P4 | A ⊆ ℝ no vacío y acotado (superior e inferiormente)

tenemos $\exists \sup(A), \exists \inf(A)$ por axioma supremo

Veamos que el conjunto ~~pre~~imagen de $f(A)$ posee ínfimo y sup.

• Debemos probar que es **NO VACÍO** y **ACOTADO**

1) Como $A \neq \phi$ y $f$ está definida en todo ℝ, si $a \in A$,
$\exists f(a) \therefore f(A) \neq \phi$

$\boxed{f(A) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y\}}$ || Imagen

2) $\exists \sup(A)$ e ínfimo de A $\neq 0 \wedge$ acotado

$\Rightarrow \forall x \in A \quad \inf(A) \leq x \leq \sup(A)$

# Si son números reales puedo usar f
# Si f es decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
$f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

$\inf(A) \leq x \quad \wedge \quad x \leq \sup(A)$

$f(x) \leq f(\inf(A)) \wedge f(\sup(A)) \leq f(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))} \Rightarrow f(A)$ está acotado
$\Rightarrow \exists \sup(f(A)), \exists \inf(f(A))$

• Además se tiene el conjunto $f(A)$ cumple
$\forall y \in f(A) \quad \inf(f(A)) \leq y \leq \sup(f(A)) \Rightarrow \inf(f(A)) \leq \sup(f(A))$ (1)

tenemos que

$\forall x \in A \quad f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))$,

$\forall y \in f(A)) \quad f(\sup(A) \leq y \leq f(\inf)(A))$

$\downarrow$ cota infe $\qquad \downarrow$ Cota superior

y como $\sup(f(A)$ es la menor de las cotas superiores $\Rightarrow \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$ ②

y como $\inf(f(A)$ es la mayor de cotas inferiores

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A) \quad ③$$

① , ② ∧ ③

$f(\sup(A) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A) \leq f(\inf(A))$ ▨

va kontamente.

• $X_m \to l \iff \lim_{m\to\infty} X_m = l \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists m_0 \in \mathbb{N}) \mid |X_m - l| < \varepsilon$

$\forall m \geq m_0$ SiEMPRE!

• $X_m$ nula si $X_m \to 0$.

• $X_N$ acotada si $(\exists M>0)(\forall m\in\mathbb{N}) \mid |X_m| \leq M$.

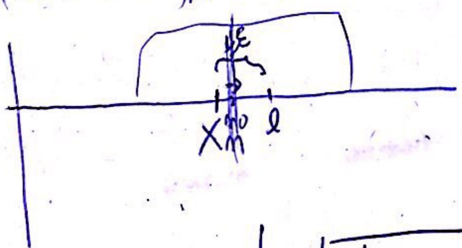
$\iff -M \leq X_m \leq M$.

• Teorema: Si $(S_m)$ es una sucesión que converge a $l_1 \in \mathbb{R}$ y también $l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow l_1 = l_2$

P5)

1) $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt{\frac{1}{m}+1} = 1$

$(\forall\varepsilon>0),(\exists m_0\in\mathbb{N}) / |X_m - l| \leq \varepsilon$, + $\forall m \geq m_0$ } Definición




$\forall\varepsilon>0, \exists m_0\in\mathbb{N} \mid \left|\sqrt{\frac{1}{m}+1} - 1\right| \leq \varepsilon, \forall m\geq m_0$

$\sqrt{\alpha} \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \infty+]$

$\alpha = \frac{1}{m}+1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{m}+1} \geq 0 + 1$ Toda raíz es ⊕ o 0

Además $\frac{1}{m}>0, \forall m\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+1}}\geq 1 \geq 0$$ $/+(-1)$ Sumo ambos lados $-1$, y tomo la desigualdad de la izq

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1}-1 \geq 0$$

Entonces $\left|\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1}_{\geq 0}\right| \leq \varepsilon$ # Lo que está dentro de $|\cdot|$ siempre $\geq 0$.

$n \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1}-1 \leq \varepsilon \quad /+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} \leq \varepsilon+1 \quad /()^2$$ ¿Por qué?

$f(n)=\sqrt{\frac{1}{n}+1} \geq 0 \wedge \varepsilon+1 \geq 0$

$\Rightarrow g(x)=x^2 / g: \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0$

# Biyectiva, sólo cuando cumplo esto puedo elevar al cuadrado

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}+1 \leq (\varepsilon+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \underbrace{(\varepsilon+1)^2-1}_{>0} \quad /\cdot n > 0$$

$$1 \leq ((\varepsilon+1)^2-1)n$$

$$\frac{1}{(\varepsilon+1)^2-1} \leq n$$

# Una vez que tengo una cota de n, puedo encontrar un $n_0$ a partir del cual converge

basta tomar $\underbrace{\left\lfloor \frac{1}{(\varepsilon+1)^2-1}\right\rfloor}+1 = n_0$

La función cajón me asegura que es natural y el $+1$ me asegura que se cumple, recordemos que es a partir de $n_0$

PDQ: $\lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$.

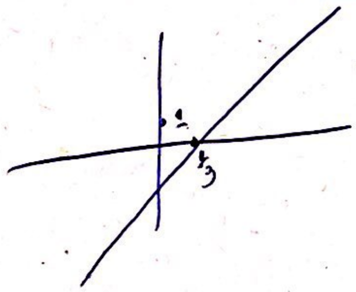
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left| \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon. \Big\}$ Definición

$\frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2(3n-1)}{3(3n-1)} = \frac{3(2n+3) - 6n + 2}{3(3n-1)}$, tomo lo de adentro para ver como se comporta.

$= \frac{11}{3(3n-1)} \Big\} \oplus$

$\underbrace{3}_{\oplus}\underbrace{(3n-1)}$ ↳ Es una función lineal que es positiva a partir de $\frac{1}{3}$.

$\forall n \geq 1$




pues en particular $n \geq 1 \geq \frac{1}{3}$

Por lo que si $n \geq 1 \Rightarrow \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \geq 0$

$\Rightarrow \left| \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{11}{3(3n-1)} \leq \varepsilon$ $\quad 3n+1 \geq 0$, si $n \geq \frac{1}{3}$

todo $\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3n+1} \leq \frac{3\varepsilon}{11}$ $\Leftrightarrow 11 \leq 3\varepsilon(3n+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 11 \leq 3\varepsilon(3m+1)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{3\varepsilon} - 1 \leq 3m$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11-3\varepsilon}{9\varepsilon} \leq m$ Encontré una cota.

basta tomar $\overbrace{\left\lfloor \frac{11-3\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rfloor}^{\in \mathbb{N}} + 1 = m_0$. $m_\varepsilon$ Asegura que se tiene.

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+1} = \frac{2}{3}$ tomamos la convergencia

[CONTRADICCIÓN]

iii) Supongamos que converge! Para demostrar.

PDQ $\lim_{n\to\infty} n^2+1 = x_n$ diverge !!

Si converge $\exists \ell \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \; |n^2+1-\ell| \leq \varepsilon$ Definición de convergencia

Como es $\forall \varepsilon > 0$

en particular $\varepsilon = 1$ debe cumplir # Todos los elementos del conjunto lo cumplen.

$n^2+\cancel{1}-\ell \leq \cancel{1} \quad \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \quad n^2 \leq \ell \quad / \forall n \geq n_0 \; \ell > 0 \quad / \sqrt{\ } \Rightarrow$ Biyectiva

$\Rightarrow \quad n \leq \sqrt{\ell}, \quad \forall n \geq n_0$

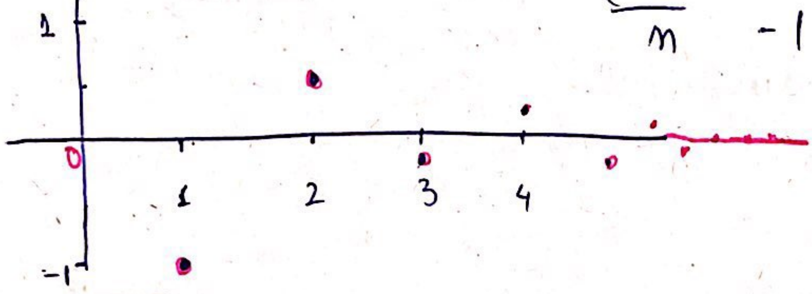
Los naturales son acotados

Sea $M = \max\{x_1, x_2, \dots x_{n_0}, \sqrt{\ell}\}$, $\forall n \geq n_0$, $n \leq M$ $\times$

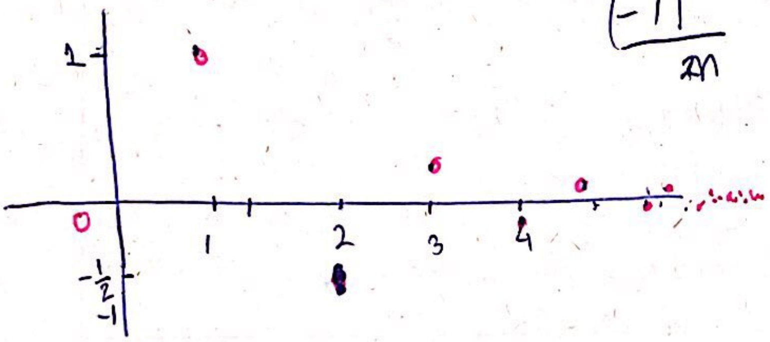
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ $\quad n\neq 0$

Veamos su comportamiento.

$\frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$



$\max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

$$\left\{ \underbrace{\max\{-1, 1\}}_{n=1}, \underbrace{\max\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}}_{n=2}, \underbrace{\max\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}}_{n=3}, \dots \right\}$$

$$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \frac{1}{n}$$

su lím conocido y convergería a igual

Pero esto es sólo la intuición ¡! ¡!

∀ la vida.

# Golazo de media cancha

$$\max\{A, B\} = \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2}$$

Propiedad que me permite calcular el máximo de manera algebraica. $\min\{A,B\} = \frac{A+B}{2} - \frac{|A-B|}{2}$

$$\max \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}{2} + \frac{\left| \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|}{2}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2n}\cancelto{0}{[1-1]} + \left| \frac{(-1)^n}{2n}[1+1] \right|$$

$|(-1)^n| = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1 \ldots\}$ si le tomo valor absoluto siempre es 1.

$$= \frac{|(-1)^n| \cdot 2}{2n} = \frac{1}{n} \quad \boxed{///}$$

Su límite y convergencia lo tomamos de un comienzo, por prop arquimediana.

[Si $y$, es un número real y $x>0$, existe un entero positivo tq $nx>y$]

# Cualquier número por grande que sea existe un natural que multiplicado por un positivo $x$ es mayor! El caso del apunte es el caso particular de $y = 1$.

Scanned with CamScanner

P2) Calcular los límites

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n \cdot \frac{(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)}$ } 1 conveniente

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ } 1 conveniente

Alg límites

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\text{por P1} \to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{1/n \to 0}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

# Yo aplico ~~conv~~ todo el límite al mismo tiempo.

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl