MA1001-3 Introducción al Cálculo, Otoño 2023
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 8: Preparación C3 (Trigonometría)

Lunes 8 de Mayo de 2023

P1. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

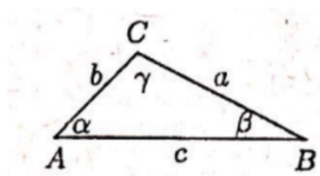
$$\frac{1}{\cot(\theta)+\cot^3(\theta)}+\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)+\operatorname{tg}^3(\theta)}+\sin(2\theta)=\sec(\theta)\operatorname{cosec}(\theta)$$

P2. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2\cos^2(x)+2\cos^2(x)\cos(2x)-20\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

P3. Demuestre que en todo triángulo de lados a, b, c y ángulos α, β, γ se cumple:

$$b\cos(\gamma)-c\cos(\beta)=\frac{1}{a}(b^2-c^2)$$

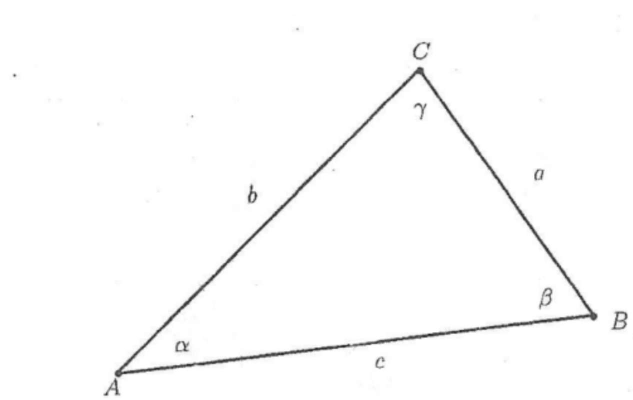


P4. Demuestre la siguiente propiedad.

$$\frac{1}{2}\cdot sin(x)\cdot sec^2(\frac{x}{2})+cos(x)\cdot tan(\frac{x}{2})-sin(x)=0$$

$$tan(4x)=\frac{4tan(x)-4tan^3(x)}{1-6tan^2(x)+tan^4(x)}$$

P5. Consideremos el triangulo ABC de ángulos respectivos.



si $\alpha = 2 \cdot \beta \Rightarrow a^2 = b \cdot (b + c)$

P6. Demuestre:
$sin(x) + sen(y) = 2 \cdot sin(\frac{x+y}{2}) \cdot cos(\frac{x-y}{2})$

P7. ***[Más de funciones]***
Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$$

Encuentre dominio, ceros, paridad, signos, periodicidad e inyectividad.

P8. ***[Más para pensar]*** Para las constantes $A, B, C \in \mathbb{R}$, con $A > B$, se definen las funciones reales f, gh en todo $x \in \mathbb{R}$ como se detalla a continuación:

$$f(x) = Acos^2(x) + Bsen^2(x) - 2Csen(x)cos(x)$$
$$g(x) = Asen^2(x) + Bcos^2(x) - 2Csen(x)cos(x)$$
$$h(x) = (A - B)sen(x)cos(x) + C(cos^2(x) - sen^2(x))$$

Se pide lo siguiente:

a) Pruebe que si $C = 0$, h alcanza su valor máximo para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) Demuestre que el conjunto de los ceros de h es $Ceros(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} tan(2x) = \frac{2C}{B - A} \right\}$.

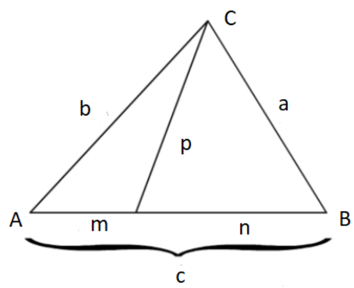
c) Estudie f y g

P9. ***[Teorema de Stewart]***

El teorema de Stewart permite determinar el valor de cualquier ceviana trazada desde uno de los vértices de un triángulo en función de los segmentos determinados por estos.
Demostrar que se cumple la siguiente ecuación:

$$c \cdot (mn + p^2) = a^2m + b^2n$$

Indicación: 0)Consideremos un triángulo ABC y un punto Q tal que pertenezca a la recta AB, en este caso CQ es una ceviana. En general se le dice ceviana al segmento que une un vértice con un punto de la recta opuesta a este.
1)Llame Q al punto intersección de la ceviana con la recta AB.
2)Defina un ángulo arbitrario y conveniente, tal que estos se relacionen directamente entre los triángulos formados y pruebe lo pedido.



P10. ***[CRMA1001-1-2011-2003][Ecuaciones Trigonométricas]***
Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica

$$a) \;\; cos^2(x) + cos^2(2x) + cos^2(3x) = \frac{3}{2}$$

$b)$ Resuelva para $a \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{2}cos(x) = a$$

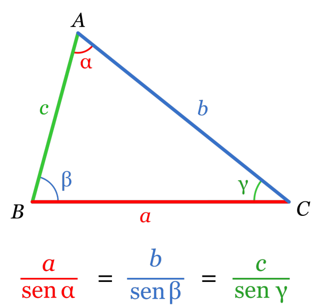
Hint: Le puede ser útil usar, sin necesidad de demostración.
$cos(\beta) + cos(\gamma) = 2cos(\frac{\beta+\gamma}{2})cos(\frac{\beta-\gamma}{2})$

P11. Resuelve

$$sen(2x) = cos(\frac{x}{2})$$

Resumen

- **Identidad Pitagórica**
  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- **Ceros de Funciones Trigonométricas**
  - $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  - $\cos(x) = 0 \iff x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
  - $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- **Ecuaciones Trigonométricas**
  - Si $|a| \leq 1$: $\sin(x) = a \iff x = k\pi + (-1)^k \arcsin(a)$, con $k \in \mathbb{Z}, \arcsin(a) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
  - Si $|a| \leq 1$: $\cos(x) = a \iff x = 2k\pi \pm \mathrm{arc}\cos(a)$, con $k \in \mathbb{Z}, \mathrm{arc}\cos(a) \in [0, \pi]$
  - $\tan(x) = a \iff x = k\pi + \arctan(a)$, con $k \in \mathbb{Z}, \arctan(a) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- **Teorema del Seno**



- **Teorema del Coseno**