

MA1101-3 Introducción al Cálculo

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez A y Javier Santidrián.



Auxiliar 5:Extra

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es inyectiva cuando

$$(\forall x, y \in A) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
- Sobreyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es sobreyectiva cuando

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$$
- Biyectividad: Sea $f : A \rightarrow B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto

$$Z(f) = \{x \in Dom(f) | f(x) = 0\}$$
- Crecimiento: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Diremos que en B
 - f es creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
 - f es decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
 - f es estrictamente creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 - f es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = x$
 - f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = -x$
- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$

P1. Considere la parábola $y^2 = 4px$ y los puntos $A(0, 0)$, $B(2p, 0)$, donde $p > 0$. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la parábola, diferente del vértice, y L la recta tangente a la parábola por P . Considere que L tiene ecuación $y_0 y = 2p(x + x_0)$ (No lo demuestre, sólo úselo)

a) Calcule las distancias d_a y d_b desde A y B a la recta L y demuestre que $d_b^2 - d_a^2 = 4p^2$

Indicación: La distancia desde (α, β) a la recta $ax + by + c = 0$ vale $\frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

P2. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$
- b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
- c) $f(x) = |x^2| - 2$
- d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

P3. Determine la paridad, ceros y biyectividad de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$
- b) $g(x) = f(x + 1)$
- c) $h(x) = f(|x|)$

P4. Sea las siguientes funciones analice sus características y luego grafíquelas:

$$a) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{|x|}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{|x| + 2}$$

P5. Considere la función f definida por $\frac{x}{x^2 - 1}$. Se pide

a) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas de todo tipo.

b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(1 + x_2 \cdot x_1) \cdot (x_1 - x_2)}{((x_1)^2 - 1)((x_2)^2 - 1)}$$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f , indicando en que intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.

c) Calcule $f((1, \infty))$ y pruebe que la función

$$\begin{aligned} \iota(x) &: (1, \infty) \rightarrow f((1, \infty)) \\ x &\rightarrow \iota(x) := f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva y determine su inversa.

d) Bosqueje el gráfico de f

1. Propuestos:

P6. Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

$$a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$b) g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$c) h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 5x + 4}$$

P7. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se defina la función $f_{a,b}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula:

$$f_{a,b}(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$$

a) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$

b) Si $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva y determine $f_{a,b}^{-1}$

c) Si $a \neq 0$, determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$

P8. Sea $f(x) = \frac{|x| + 1}{|x| - 1}$

a) Determine dominio, ceros, paridad y periodicidad de f

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

c) Bosqueje el gráfico de f y determine su recorrido

P9. Sea $f(x) = 6x^2 - x - 5$. Determine paridad, ceros, crecimiento, inyectividad, sobreyectividad y cuando corresponda, la inversa de las siguientes funciones:

- a) $g(x) = f(f(x))$
- b) $g(x) = f(x + 1)$
- c) $g(x) = f(|x|)$
- d) $g(x) = |f(x - 1)|$
- e) $f(f(x + 1) - f(|x|))$

P10. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

- a) Determine el dominio de f.
- b) Demuestre que f es par.
- c) A partir de lo anterior, determine el máximo conjunto A donde f es función y el conjunto B de modo que f sea biyectiva
- d) Determine la función inversa
- e) Grafique.

P11. Considere la función

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Pruebe que esta función satisface la identidad:

$$f(x + y) \cdot f(x - y) = f(2x) + f(2y)$$

