MA1001-3 Introducción al Cálculo
Profesores: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yañez A y Javier Santidrian

Auxiliar 03 Preparación C1 Cálculo

03 Abril 2023

P1. ***Axiomas desigualdades y valor absoluto*** Usando los axiomas de cuerpo de los reales y teoremas de unicidad de los elementos neutros e inversos, demostrar que

$$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, a(b^{-1}) = (a^{-1}b)^{-1}$$

P2. Demostrar $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple

$$2|a| - |a^2| \leq 1$$

P3. Axiomas de Orden

Pruebe que si $x, y > 0$, entonces:

$$(x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4$$

P4. Inecuaciones

Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - |x + 1|}{|x + 1| - 2} \geq 1$$

Extra: ¿Qué hacer cuando hay dobles valores absolutos? Estudie la inecuación: $x \geq ||x+1|+|x-1|-|x||-1$

Pauta de corrección Control 1

P1. (a) **(3 pts.)** Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de los elementos neutros e inversos, demostrar que: $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a(b^{-1}) = \left(a^{-1}b\right)^{-1}$

Solución: PDQ: El recíproco de $a^{-1}b$ vale $a(b^{-1})$
Es decir, PDQ: $(a^{-1}b) \cdot \left[a(b^{-1})\right] = 1$

1.0

En efecto:

$$\begin{aligned}
\left(a^{-1}b\right) \cdot \left[a(b^{-1})\right] &= a^{-1}\left(b \cdot \left[a(b^{-1})\right]\right) && \text{; Ax. Asoc.} \\
&= a^{-1}\left(b \cdot \left[b^{-1}a\right]\right) && \text{; Ax. Conm.} \\
&= a^{-1}\left(\left[b \cdot b^{-1}\right]a\right) && \text{; Ax. Asoc.} \\
&= a^{-1}\left(1 \cdot a\right) && \text{; Ax. EInv.} \\
&= a^{-1}\left(a \cdot 1\right) && \text{; } \cancel{\text{Ax. Conm.}}^{*} \\
&= a^{-1} \cdot a && \text{; Ax. ENeutro.} \\
&= a \cdot a^{-1} && \text{; Ax. Conm.} \\
&= 1 && \text{; Ax. EInv.}
\end{aligned}$$

[±0.3 cada axioma no redundante, con máximo 2.0. La conm. * no se exige y no tiene puntaje]

2.0

(b) **(3 pts.)** Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $2|a| - |a^2| \leq 1$.

Solución: PDQ: $1 - 2|a| + |a^2| \geq 0$

1.0

Esto es cierto ya que:

$$1 - 2|a| + |a^2| = 1 - 2|a| + |a|^2 \quad \text{; Propiedad de módulo}$$

1.0

$$\begin{aligned}
&= (1 - |a|)^2 \\
&\geq 0 && \text{; Todo cuadrado es } \geq 0
\end{aligned}$$

1.0

Intro al Cálculo
Pauta Auxiliar 3 $\rightarrow$ P2 y P3

Javier Santibáñez Salas

Tema: Desigualdades, [redacted] e Inecuaciones

P2 Desigualdades

Resumen:

Axiomas de Orden:

1) Tricotomía: Para todo $x \in \mathbb{R}$ sólo se tiene una de las sig. 3 opciones:

   i) $x > 0$

   ii) $x = 0$

   iii) $x < 0$ $\quad ((-x) > 0)$

2) Clausura: Para todo $x, y > 0$:

   $x + y > 0 \ \wedge \ x \cdot y > 0$

Definición de Desigualdades (Como denotar cualquier desigualdad en general)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\underset{(\leq)}{x < y} \iff \underset{(\geq)}{y - x > 0}$
- $\underset{(\geq)}{x > y} \iff \underset{(\geq)}{x - y > 0}$

Alternativa:

Para todo $x, y > 0$:

- $x < y \iff \dfrac{y}{x} > 1$
- $x > y \iff \dfrac{x}{y} > 1$

$x, y > 0$. Ejercicio

PDQ $(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4$ $\quad (\iff (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) - 4 \geq 0)$

SOL: En efecto:

$$
\begin{aligned}
&(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) - 4 \\
&= x(x^{-1}+y^{-1}) + y(x^{-1}+y^{-1}) - 4 && \text{(dist.)} \\
&= xx^{-1} + xy^{-1} + yx^{-1} + yy^{-1} - 4 && \text{(dist.)} \\
&= 1 + xy^{-1} + x^{-1}y + 1 - 4 && \text{(inversos.)} \\
&= xy^{-1} + x^{-1}y + 1 + 1 - 4 && \text{(conmut. +)} \\
&= xy^{-1} + x^{-1}y - 2 && \text{(def)} \\
&= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 && \text{(notación)} \\
&= \frac{x}{y}\cdot\frac{x}{x} + \frac{y}{x}\cdot\frac{y}{y} - 2\cdot\frac{xy}{xy} && \text{(siguiente supone para sacar común múltiplo)} \\
&= \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} - \frac{2xy}{xy} \\
&= \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} \\
&= \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

factorizando

- $x, y > 0 \Rightarrow xy > 0$
- $(x-y)^2 \geq 0$

Encontrar conjunto solución S de: $\dfrac{x^2-|x+1|}{|x+1|-2} \geq 1$

P3

Rec: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$

Sol: El pto crítico se obtiene de:

$$|x+1| = 0 \iff x+1=0 \iff x=-1$$

1° Hay que trabajar sin valores absolutos. Para ello necesitamos saber en cada valor absoluto qué x hace que se anule (dónde cambia de signo). Estos se llaman "puntos críticos"

Notar que cuando $x=-1$, la desig. queda:

$$\frac{(-1)^2-\cancel{|-1+1|}^{\,0}}{\cancel{|-1+1|}_{\,0}-2} \geq 1 \iff -\frac{1}{2} \geq 1 \iff F$$

$\therefore -1 \notin S$

2° Hay que ver si los puntos críticos $\in S$ o no evaluando aquellos x en la desigualdad original y viendo si la cumplen o no

Además, los siguientes son puntos de indefinición (y por ende $\notin S$):

$$|x+1|-2=0 \iff |x+1|=2 \iff x+1=2 \vee x+1=-2$$
$$\iff x=1 \vee x=-3$$

$\therefore -3, 1 \notin S$.

3° Hay que identificar los puntos de indefinición (los que anulan algún denominador), los cuales $\notin S$

Ahora, veamos qué pasa afuera del punto crítico: (ie cuando $x \neq -1$)

4° Hay que ponerse en los casos en que x sea distinto a los puntos críticos (excluyendo los puntos de indefinición) resolver los valores absolutos y la inecuación resultante

i) $x \in \underbrace{(-\infty,-1)\setminus\{-3\}}_{I_1 =}$: excluyo pto de indefinición

I_1 I_2

$-\infty$ -1 ∞

$$x+1 < -1+1 = 0 \implies |x+1| = -(x+1) = -x-1$$

$x<-1$

Inec. queda:

$$\frac{x^2-|x+1|}{|x+1|-2} \geq 1 \iff \frac{x^2+x+1}{-x-1-2} - 1 \geq 0$$

$$\iff -\frac{x^2+x+1}{x+3} - 1 \geq 0$$

$$\iff -\left(\frac{x^2+x+1}{x+3}+1\right) \geq 0$$

$$\underset{\cdot(-1)}{\iff} \frac{x^2+x+1+x+3}{x+3} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2+2x+4}{x+3} \leq 0$$

$$\iff \frac{(x+1)^2+3}{x+3} \leq 0$$

Análisis de Signos

Notar que $(x+1)^2+3 > 0$ pues $(x+1)^2 \geq 0$ y $3>0$

$$\implies x+3 < 0$$

$x \neq -3$

$-\infty$ -3 -1 ∞

ie $x<-3$, o mejor dicho $x \in (-\infty,-3) =: S_1$

conjunto solución 1 (intersección de ~~ con ~~)

ii) $x \in \underbrace{(-1,+\infty)\setminus\{1\}}_{I_2 =}$: excluyo pto de indefinición

$$x+1 > -1+1 = 0 \implies |x+1| = x+1$$

Inec. queda:

$$\frac{x^2-|x+1|}{|x+1|-2} - 1 \geq 0$$

$$\iff \frac{x^2-x-1}{x+1-2} - 1 \geq 0$$

$$\iff \frac{x^2-x-1}{x-1} - 1 \geq 0$$

$$\iff \frac{x^2-x-\cancel{1}-x+\cancel{1}}{x-1} \geq 0$$

$$\iff \frac{x^2-2x}{x-1} \geq 0$$

$$\iff \frac{x(x-2)}{x-1} \geq 0$$

Ptos críticos (de cambio de signo):

- $x=0$
- $x-2=0 \iff x=2$
- $x-1=0 \iff x=1$ (indefinición)

Analizamos signos:

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x(x-2)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

$-\infty$ -1 0 1 2 ∞

$$\implies x \in [0,1) \cup [2,+\infty) =: S_2$$

conjunto solución 2 (intersección de ~~ con ~~)

5° Unir conjuntos solución y puntos críticos que $\in S$ (excluyendo puntos de indefinición)

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = (-\infty,-3) \cup [0,1) \cup [2,+\infty)$$

Extra:

¿Qué hacer cuando hay dobles valores absolutos? Estudie la inecuación:

$$x \geq \big||x+1|+|x-1|-|x|\big|-1$$

SOL: Seguir el mismo procedimiento que antes pero con los valores absolutos que están dentro del valor absoluto grande

Paso 1: Identificar puntos críticos:

- $|x+1|=0 \iff x+1=0 \iff x=-1$
- $|x-1|=0 \iff x-1=0 \iff x=1$
- $|x|=0 \iff x=0$

Paso 2: Ver si puntos críticos $\in S$ o no (ie si cumplen la desigualdad):

- $x=-1$: $-1 \geq \big||-1+1|+|-1-1|+|-1|\big|-1$
$\iff -1 \geq \big||0|+|-2|+|-1|\big|-1$
$\iff -1 \geq |0+2+1|-1$
$\iff -1 \geq |3|-1$
$\iff -1 \geq 3-1$
$\iff -1 \geq 2$
$\iff F$

$\therefore -1 \notin S$

- $x=1$: $1 \geq \big||1+1|+|1-1|-|1|\big|-1$
$\iff 1 \geq \big||2|+|0|-|1|\big|-1$
$\iff 1 \geq |2+0-1|-1$
$\iff 1 \geq |1|-1$
$\iff 1 \geq 1-1$
$\iff 1 \geq 0$
$\iff V$

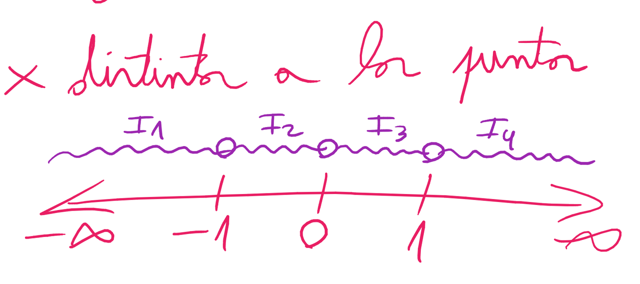
$\therefore 1 \in S$

- $x=0$: $0 \geq \big||0+1|+|0-1|-|0|\big|-1$
$\iff 0 \geq \big||1|+|-1|-|0|\big|-1$
$\iff 0 \geq |1+1-0|-1$
$\iff 0 \geq |2|-1$
$\iff 0 \geq 2-1$
$\iff 0 \geq 1$
$\iff F$

$\therefore 0 \notin S$

Paso 3: Excluir puntos de indefinición (no hay así que pasamos al siguiente paso)

Paso 4: Analizar los x distintos a los puntos críticos $\{-1,0,1\}$:



i) $x \in I_1 = (-\infty,-1)$

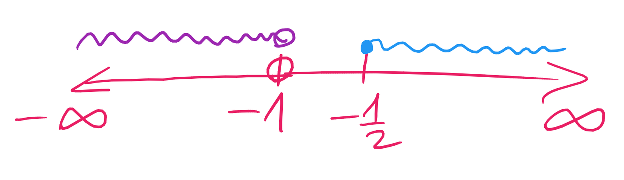
Aquí $x<-1$, luego:

- $x+1 < -1+1 = 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$
- $x-1 < -1-1 = -2 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$
- $x < -1 < 0 \Rightarrow |x| = -x$

La inecuación queda:

$x \geq \big||x+1|+|x-1|-|x|\big|-1$
$\iff x \geq |-(x+1)-(x-1)-(-x)|-1$
$\iff x \geq |-x\cancel{-1}\cancel{-x}\cancel{+1}\cancel{+x}|-1$
$\iff x \geq |-x|-1$
$\iff x \geq -x-1 \iff 2x \geq -1$
$\iff x \geq -\frac{1}{2}$
$\iff x \in [-\frac{1}{2},+\infty)$

$x<-1 \Rightarrow -x>1>0 \Rightarrow |-x|=-x$



No hay intersección entre y

$\therefore S_1 = \emptyset$

ii) $x \in I_2 = (-1,0)$:

Aquí $-1<x<0$, luego:

- $x+1 > -1+1 = 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$
- $x-1 < 0-1 = -1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$
- $x<0 \Rightarrow |x| = -x$

La inecuación queda:

$x \geq \big||x+1|+|x-1|-|x|\big|-1$
$\iff x \geq |(x+1)-(x-1)-(-x)|-1$
$\iff x \geq |x+1\cancel{-x}+1\cancel{+x}|-1$
$\iff x \geq |x+2|-1$
$\iff \cancel{x} \geq \cancel{x}+2-1 \iff 0 \geq 1$
$\iff F$

$x>-1 \Rightarrow x+2>1>0 \Rightarrow |x+2|=x+2$

$\therefore S_2 = \emptyset$

iii) $x \in I_3 = (0,1)$:

Aquí $0<x<1$, luego:

- $x+1 > 0+1 = 1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$
- $x-1 < 1-1 = 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$
- $x>0 \Rightarrow |x| = x$

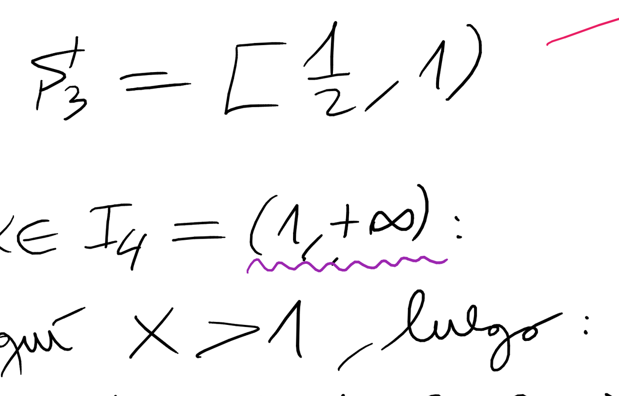
La inecuación queda:

$x \geq \big||x+1|+|x-1|-|x|\big|-1$
$\iff x \geq |\cancel{x}+1-(x-1)\cancel{-x}|-1$
$\iff x \geq |-x+2|-1$
$\iff x \geq |-(x-2)|-1$
$\iff x \geq |x-2|-1$

$|-y| = |-1\cdot y| = |-1|\cdot|y| = 1\cdot|y| = |y|$

$\iff x \geq -(x-2)-1 \iff x \geq -x+2-1$
$\iff 2x \geq 1$
$\iff x \geq \frac{1}{2}$
$\iff x \in [\frac{1}{2},+\infty)$

$x<1 \Rightarrow x-2<-1<0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$



$\therefore S_3 = [\frac{1}{2},1)$ → intersección de con

iv) $x \in I_4 = (1,+\infty)$:

Aquí $x>1$, luego:

- $x+1 > 1+1 = 2 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$
- $x-1 > 1-1 = 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$
- $x > 1 > 0 \Rightarrow |x| = x$

La inecuación queda:

$x \geq \big||x+1|+|x-1|-|x|\big|-1$
$\iff x \geq |x\cancel{+1}\cancel{+x}\cancel{-1}\cancel{-x}|-1$
$\iff x \geq |x|-1$
$\iff \cancel{x} \geq \cancel{x}-1$
$\iff 0 \geq -1 \iff V$

$\therefore S_4 = (1,+\infty)$.

Paso 5: Unir todos los conjuntos solución junto con los puntos críticos que $\in S$:

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \{1\}$
$= \emptyset \cup \emptyset \cup [\frac{1}{2},1) \cup (1,+\infty) \cup \{1\}$
$= [\frac{1}{2},\infty)$ ▥