IN3171 - Modelamiento y Optimización

Control 2

Profesores: Azucena Orellana y Martín Valdevenito
Auxiliares: Nicolás Acevedo, Diego Cares, José Miguel González, Catalina Leppe, Pedro Maldonado, Paz Meneses, Matías Muñoz, Mariana Quiroga, Germán Silva y Pablo Ubilla

1 Simplex y Sensibilidad

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 30 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 15 \\ & x_2 \leq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) *(0,5 pts)* Considere el punto $(x_1, x_2) = (0, 20)$. Es este punto una solución básica factible del problema? De serlo, cuál es la base asociada a este punto? **R:**

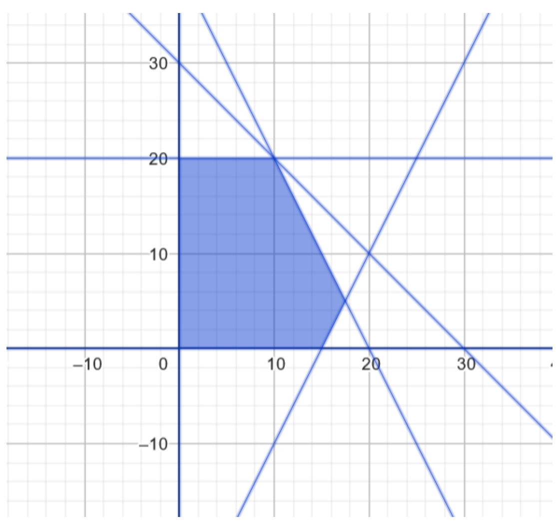

Fig. 1: Poliedro P1

Tomando el punto x= (0,20), se puede notar que se activan n=2 restricciones linealmente independientes, siendo estas $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$.

Transformando el poliedro a su forma estándar:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\
& x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_5 = 15 \\
& x_2 + x_6 = 20 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Se puede notar que las restricciones se cumplen obteniendo el punto x=(0,20,10,20,25,0) cuya base asociada es B={2,3,4,5}

(b) *(3 pts)* Resuelva el problema utilizando el método Simplex. Inicialize con el punto anterior.

Primera iteración

Inicializando en el punto anterior con su base asociada se obtienen las siguientes matrices y costos:

B=(2,3,4,5), N=(1,6)

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_N = (-3, 0)$
$c_B = (-1, 0, 0, 0)$
Luego su costos reducidos son: $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (-3, 1)$
Por lo que x_1 entra a la base.
Para encontrar la variable que sale de la base veremos su dirección factible:

$$d_B = -A_B^{-1} \cdot A_1 = (0, -1, -2, -1)$$

$$d_1 = (1, 0, -1, -2, -1, 0)$$

Usando el criterio de $\theta^* = min\{\frac{-x_i}{d_i}\}$, se obtiene {10,10,25}, donde usando la Regla de Bland, se escoge x_3 para salir de la base con $\theta^* = 10$.

Luego, el nuevo punto se obtiene con $x' = x + \theta^* d_1$, el cual corresponde a x'=(10, 20, 0, 0, 15, 0)

Segunda iteración

B=(2,1,4,5), N=(3,6)

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_N = (0, 0)$
$c_B = (-1, -3, 0, 0)$

Luego su costos reducidos son: $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (3, -2)$

Por lo que x_6 entra a la base.

Para encontrar la variable que sale de la base veremos su dirección factible:

$$d_B = -A_B^{-1} \cdot A_1 = (-1, 1, -1, -\frac{3}{2})$$

$$d_6 = (1, -1, 0, -1, -\frac{3}{2}, 1)$$

Usando el criterio de $\theta^* = min\{\frac{-x_i}{d_i}\}$, se obtiene $\{20, 0, 10\}$, donde se escoge x_4 para salir de la base con $\theta^* = 0$.

Luego, el nuevo punto se obtiene con $x' = x + \theta^* d_6$, el cual corresponde a x'=(10, 20, 0, 0, 15, 0)

Tercera iteración

B=(2,1,6,5), N=(3,4)

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_N = (0,0)$
$c_B = (-1,-3,0,0)$
Luego su costos reducidos son: $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (-1,2)$
Por lo que x_3 entra a la base.
Para encontrar la variable que sale de la base veremos su dirección factible:

$$d_B = -A_B^{-1} \cdot A_1 = (-2,1,2,-2)$$

$$d_3 = (1,-2,1,0,-2,2)$$

Usando el criterio de $\theta^* = min\{\frac{-x_i}{d_i}\}$, se obtiene $\{10,\ \frac{15}{2}\}$, donde se escoge x_5 para salir de la base con $\theta^* = \frac{15}{2}$.
Luego, el nuevo punto se obtiene con $x' = x + \theta^* d_3$, el cual corresponde a x'=($\frac{35}{2}$, 5, $\frac{15}{2}$, 0, 0, 15)

Cuarta iteración

B=(2,1,6,3), N=(5,4)

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_N = (0,0)$
$c_B = (-1,-3,0,0)$
Luego su costos reducidos son: $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$
Como los costos reducidos son positivos, se llegó al óptimo, el cual corresponde a x=($\frac{35}{2}$, 5, $\frac{15}{2}$, 0, 0, 15)

(c) *(1,5 pts)* Obtenga el problema dual del problema anterior y el óptimo dual a través de holgura complementaria.
El problema dual es:

$$(D) \quad \begin{array}{rl} \min & 30y_1 + 40y_2 + 15y_3 + 20y_4 \\ \text{s.a.} & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 + y_4 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

También puede escribirse como:

$$(D)\quad \begin{aligned} \max \quad & 30y_1 + 40y_2 + 15y_3 + 20y_4 \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -3 \\ & y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 + y_4 \leq -1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Para calcular el óptimo dual, se usará holgura complementaria llegando a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_1(x_1 + x_2 - 30) = 0 \\ (2) \quad & y_2(2x_1 + x_2 - 40) = 0 \\ (3) \quad & y_3(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 15) = 0 \\ (4) \quad & y_4(x_2 - 20) = 0 \\ (5) \quad & x_1(y_1 + 2y_2 + y_3 - 3) = 0 \\ (6) \quad & x_2(y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 + y_4 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo se llega al punto $y^* = (0, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0)$. Esto es para el problema dual con minimización, con maximización las ecuaciones (5) y (6) cambian a:

$$\begin{aligned} (5) \quad & x_1(y_1 + 2y_2 + y_3 + 3) = 0 \\ (6) \quad & x_2(y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 + y_4 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Y el óptimo es $y^* = (0, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, 0)$

(d) *(1 pt)* Suponga que simultáneamente las restricciones 2 y 3 pasan a ser:

- $2x_1 + x_2 \leq 44$.
- $x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 16$.

respectivamente. ¿En cuánto cambia el óptimo del problema?

(Hint: Recuerde las condiciones de sensibilidad local.)

Primero se debe comprobar si es que la base sigue siendo factible, para eso se usa la condición $A_B^{-1}b' \geq 0$ con $b' = (30, b_1, b_2, 20)$

$$A_B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ b_1 \\ b_2 \\ 20 \end{bmatrix} \geq 0$$

Obteniendo el rango de variación para $b_1 \in [0, 20]$ y para $b_2 \in [30, 50]$. Luego, se puede notar que tanto 44 en la restricción 2 como 16 en la restricción 3, están dentro del rango, por lo que la base sigue siendo factible.

Luego como la base sigue factible, la variación en las restricciones producirá una cambio en el valor óptimo equivalente al precio sombra asociado a la restricción, por lo que se concluye que el cambio en el óptimo corresponde a:

$$\Delta Z^* = 4y_2^* + y_3^* = 5 + \frac{1}{2} = 5.5$$

2 Dualidad

Un conjunto de trabajos $j \in J$ deben ser procesados en un conjunto de máquinas $i \in I$. El tiempo de proceso del trabajo j es p_{ij} en caso de ser asignado a la máquina i. Deseamos distribuir los trabajos entre las máquinas de forma de minimizar el tiempo en que se completan todos los trabajos (*makespan*).

(a) *(2 pts)* Formule un modelo de programación lineal mixta con variables de decisión x_{ij} que indican si el trabajo j se procesa en la máquina i, y T el tiempo final de procesamiento. **R:**

- Conjuntos y parámetros: (0 Décimas)

  Era notar que las letras mayúsculas I y J eran conjuntos de donde saldrán los sub índices a utilizar y que p_{ij} es el parámetro asociado a cuanto tiempo costaría el realizar un trabajo en una máquina.

- Variables de Decisión: (0 Décimas)

  Considerando las variables de decisión entregadas por el enunciado X_{ij}: 1 si el trabajo j $\in$ J se realiza en i $\in$ I, 0 si no; y la variable T: tiempo final de procesamiento o también tiempo en que termina la última máquina con su último trabajo.

- Función Objetivo: (0,5 Décimas)

  $$\min \quad T$$

  Se define de esta manera pues se dice explícitamente que es el tiempo donde terminan los trabajos que se debía minimizar.

- Restricciones:

  (a) **Realizar todos los trabajos:** (0,5 Décimas)

  $$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in J$$

  Se suma sobre los trabajos para dar todas las opciones que podrían ser 1, y se fija el j para asegurarse que si o si se haga.

  (b) **Terminar los trabajos en máximo el tiempo T:** (0,5 Décimas)

  $$\sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \leq T \quad \forall i \in I$$

  Esta restricción sirve para asegurarse que la variable T haga su pega (y relacionar x y T). Por debajo se puede ver que T originalmente es el trabajo que se demora más, es decir, $\max_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} p_{ij}$. En clases se vio como linealizar un máximo y un mínimo a través de restricciones lineales. Ese es el trabajo de esta restricción. Cobra más sentido si se ve este problema como un problema de N mochilas y que queramos que todas pesen lo menos posible.

(c) **Naturaleza de las variables:** (0,5 décimas)

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall\ i \in I,\ j \in J$$

$$T \geq 0$$

X si o si había que indicar que era binaria de esta manera. Es como definir variables en guroby. T podía ser en los naturales pero no es necesario, si la defines real positiva podrías facilmente notar que la suma de enteros da un número entero.

(b) *(0,5 pts)* Escriba la relajación lineal de ese problema. Cómo se interpretan ahora las variables x_{ij}. ¿Por qué no es necesario agregar la restricción $x_{ij} \leq 1$? **R:**

Escribir la relajación lineal del problema era explícitamente re-escribir el problema relajado, pero se consideraba aceptable indicar solo lo siguiente:

X_{ij} para a ser una variable continua con las siguientes restricciones:

$$x_{ij} \geq 0$$

(1 Décima)

$$x_{ij} \leq 1$$

(1 Décima)

Se debia además indicar que la restricción de que todos los trabajos se hacen genera una cota mas apretada que $x_{ij} \leq 1$ dado que esa restricción es equivalente a la que tenemos. Si se suma sobre i, obtendríamos que $\sum_i X_{ij} \leq |I| \quad \forall j \in J$ y la restricción ya escrita dice lo mismo excepto que es menor e igual a 1. (3 Décimas)

Decir que por definición es binaria (argumento cíclico, recordar que decir que algo es algo no es lo mismo que expresarlo matemáticamente) o que la función objetivo hace el trabajo de que no sea necesaria la cota superior (buen intento) no eran argumentos acertados.

(c) *(2 pts)* Explicite el dual de la relajación lineal usando variables α_j para la restricción que asegura que el trabajo j es asignado y β_i para las restricciones que definen el tiempo máximo. **R:**

Era fundamental en esta pregunta darte cuenta que explícitamente te indican que restricciones debes considerar, como también que el sub índice de cualquier variable dual esta asociado al $\forall$ que tiene la restricción de donde nace. En este caso podías deducir lo siguiente:

- La restricción que el trabajo j es asignado tiene un $\forall\ j \in J$
- La restricción que asegura el tiempo máximo tiene un $\forall\ i \in I$

De ahí podías reconocer que cambios hacerle a tu PPL.

Dado eso, el problema tenía una importante dificultad: Tenías variables a ambos lados de la restricción (X y T) y además estas variables tienen distintos sub índices.

Para enfrentarte a eso podías darte un ejemplo pequeño y ver como se comportaba tu dual de juguete, o aplicar el método de múltiplicar las variables duales por tu restricción y factorizar.

Ese último método es bastante efectivo, pues factorizas por tus variables primales y lo que queda dentro del parentesis será tu restricción dual, y las variables duales que quedan solas van en la función objetivo.

veamos como aplicarlo, multiplicando nuestras variables por la izquierda y dejando un 0 a la derecha.:

- La primera restricción asociada a α_j:

$$\alpha_j \sum_i x_{ij} - \alpha_j = 0$$

- La segunda restricción asociada a β_i:

$$\beta_i T - \beta_i \sum_j p_{ij} x_{ij} \geq 0$$

Recordemos que la cantidad de restricciones en el dual es equivalente a al cantidad de variables en el primal, por lo tanto queremos ver como se ven esas restricciones duales. Para eso tenemos que factorizar por T y X_{ij}:

- Factorizar por T

  $$T(\beta_i)$$

  Esta restricción era para todo i. Por lo tanto es realmente tener esa ponderación i veces. Así que la restricción final sería factorizar todas esas expresiones sobre T.

  $$T(\sum_{i \in I} \beta_i)$$

- Factorizar por $\sum X_{ij}$

  Aca haremos un abuso de notación, realmente X es una matriz y $\sum_i X_{ij}$ es realmente el vector x_i haciendo producto punto con un vector de 1 del mismo tamaño como vimos en mi resumen de algebra lineal en material docente (lo mismo para j).

  Pero algo que he aprendido con el tiempo es que tratar X matriz como un X en $\mathbb{R}^1$ funciona la mayoría de las veces. Por lo tanto fingiremos locura y factorizaremos por $\sum X$ porque sabemos que al final del camino, siempre queda X factorizando una expresión de las variables duales.

  $$\sum x_{ij} * (\alpha_j - p_{ij} \beta_i)$$

  Realmente eso funciona por el argumento de arriba, teníamos j veces una restricción que sumaba sobre i, e i veces una restricción que sumaba sobre j, lo que al factorizar es como sumar sobre todos los sub indices de X_{ij} ¿Pero que pasa con el resto de variables? Realmente es fácil marearse sin saber factorizar en espacios matriciales, así que es mejor pasar al siguiente paso pues ya hemos ganado.

¿Porque hacemos esto? En el curso de Optimización avanzado se la manera oficial de hacer esto, pero lo importante es que lo que quedó a la derecha es la expresión final de la restricción que nos falta, la asociada a X. Solo quedaría concretar el problema. (Es gracioso notar que si te dabas un ejemplo chico, podías deducir lo mismo, usar ambos métodos suele ser lento pero efectivo).

Fijense que después de factorizar quedó un α_j solo . Las variables duales que quedan solas o acompañadas de solo un parámetro (con solo me refiero a que no se fueron factorizadas) van en la función objetivo, y como realmente no pueden haber $\forall$ en una función objetivo, sumamos sobre su sub-indice quedando.

$$\max \sum_{j \in J} \alpha_j$$

(0.5 décimas)

sujeto a las siguientes restricciones:

- Restricción que nace de T: (5 Décimas)

$$\sum_{i\in I} \beta_i \leq 1$$

  Es ≤ 1 pues T es ≥ 0 y T estaba 1 vez en la F.O

- Restricción que nace de $\sum_{ij} X_{ij}$: (5 Décimas)

$$\alpha_j - p_{ij}\beta_i \leq 0 \quad \forall\ i \in I,\ j \in J$$

  No estaba α en la función objetivo así que se pone 0. ¿Porque se pone $\forall$ y no sumar?. Porque factorizamos por la suma (argumento chanta, el de verdad tiene que ver con matrices, si agrupabas todo como producto punto de manera matricial, quedaba $\alpha^t(X^t 1) - Xp\beta$ (o algo así) y si notas que el análisis dimensional de la multiplicación de matrices te da un escalar, podías usar el teorema de reordenar de la traza para factorizar segun X. Te quedaría una ponderación de matrices fea que puedes descomponer al devolverte a usar los sub indices que quedarían dando vuelta. En resumen esto es medio complicado).

- Nat. Var: (5 Décimas)

$$\alpha \in \mathbb{R}^j$$

$$\beta i \geq 0 \quad \forall\ i \in I$$

Se puede notar que si en vez de tirar el $X_{ij}p_{ij}$ restando, dejabas el T restando en la restricción b) primal el dual quedaba con los siguientes cambios:

- $\beta_i \leq 0$ en el nat var
- $\alpha_j + p_{ij}\beta_{ij} \leq 0$ en la restricción 2.

(d) *(1 pt)* Muestre que en el óptimo dual se tiene que $\alpha_j = \min_{i\in I} -\beta_i p_{ij}$ y deduzca que $\beta_i \neq 0$. **R:**

- $\alpha_j = \min_{i\in I} -\beta_i p_{ij}$: (5 Décimas)
  Si inicias desde la restricción $\alpha_j - p_{ij}\beta_{ij} \leq 0$ y pasas restando el término de β debería quedar $\alpha_j \leq p_{ij}\beta_i$ si es que tu β es ≥ 0. Para llegar a lo solicitado era hacer el cambio de variable a que tu β es ≤ 0 y hacer aparecer un - al lado de todos tus β anteriores.

  Finalmente era notar que si $\alpha_j \leq -p_{ij}\beta_i$ para todo i, también $alpha$ será más pequeño que el $p_{ij}\beta_i$ más chico, obteniendo lo buscado.

- $\beta_i \neq 0$: (5 Décimas)
  Si asumes que $\beta_i = 0$ se puede notar inmediatamente por la parte anterior que $\alpha_j = 0\ \forall j$. Inmediatamente por esto el valor óptimo Dual es 0 pues α_j es a lo máximo 0 y usando dualidad fuerte puedes concluir que T sería 0. Lo que es imposible. Terminas el argumento señalando la contradicción.

(e) *(0,5 pts)* Concluya que en el óptimo primal todas las máquinas terminan al mismo tiempo. **R:** (5 Décimas)

Se esperaba que argumentaran de manera matemática a través de una demostración.

Sabiendo todo lo anterior, podían aplicar el único teorema que le importa cuando ciertas variables son distintas de 0. **Holgura Complementaria**.

¿Que variable es distinta de 0? β

por lo tanto la componente de HC queda:

$$\beta_i(T - \sum_j p_{ij}x_{ij}) = 0 \quad \forall\ i \in I$$

Lo que se obtuvo de la parte anterior implica que $(T - \sum_j p_{ij}x_{ij}) = 0 \quad \forall\ i \in I$ lo que implica que $T = \sum_j p_{ij}x_{ij} \quad \forall\ i \in I$ y fijándonos en el lado derecho de la restricción podemos concluir que todas las máquinas deben terminar al mismo tiempo.

3 Programación Entera

(a) *(3 pts)* Considere el siguiente problema entero:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{aligned}$$

Resuelva el problema entero con el algoritmo de cortes de Gomory o Branch & Bound.

R:

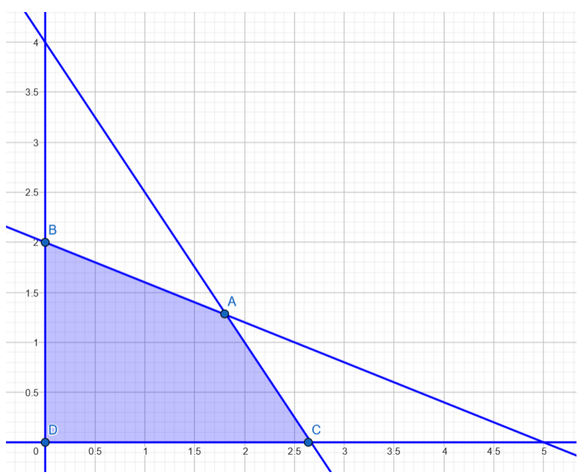

Fig. 2: Región Factible

De la región factible se obtienen 4 posibles vértices para el problema relajado, siendo el **Punto A** el óptimo, cuyas coordenadas son $x^* = (\frac{20}{11}, \frac{14}{11})$. La optimalidad se podía justificar reemplazando cada SBF en la función objetivo y comprobando que este punto es quien la maximiza, o también calculando sus costos reducidos y viendo que eran no-negativos.

Luego, había que utilizar B&B o Cortes de Gomory.

B&B:

Con el óptimo relajado es fraccionario se crean dos subproblemas. En este caso lo crearemos a partir de $x_1 = \frac{20}{11} = 1,8....$ Se creará F_2 con $x_1 \leq 1$ y por otra parte F_3 con $x_1 \geq 2$.

*Se podía partir perfectamente con x_2 y el resultado final lógicamente era el mismo óptimo.

F_2 queda

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

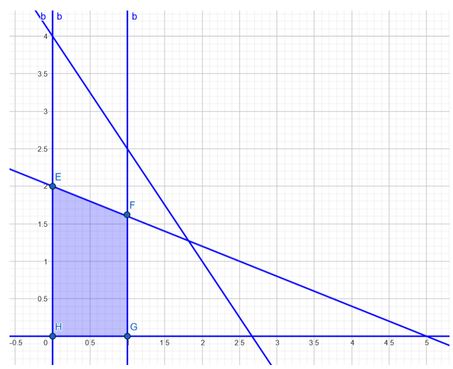

Fig. 3: Región Factible F2

Donde el óptimo del subproblema es el **Punto F** (el argumento es el mismo que para el problema relajado anterior), $x^* = (1, \frac{8}{5})$, cuyo valor en la función objetivo es $Z^* = 6,8$

F_3 queda

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

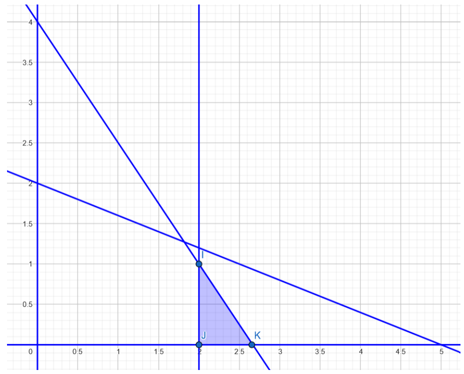

Fig. 4: Región Factible F3

Donde el óptimo del subproblema es el **Punto I**, $x^* = (2, 1)$, cuyo valor en la función objetivo es $Z^* = 7$, por lo que al ser un punto entero actualizamos el incumbente y cortamos la rama.

Acá la clave era notar que la rama del subproblema F_2 nos dio un valor óptimo menor a esta, por lo que no tenía sentido seguir haciéndole cortes ya que jamás obtendríamos algo mejor al incumbente actual. Por ende, termina el algoritmo con un óptimo igual a 7 en el punto $x^* = (2, 1)$

Cortes de Gomory:

Pasando el problema a forma estándar quedaba:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - 3x_2 \\
& 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}_0^+
\end{aligned}$$

Al ya haber obtenido el óptimo relajado anteriormente, es fácil despejar mediante las restricciones de igualdad que el óptimo relajado expresado con las nuevas variables de holgura es $x^* = (\frac{20}{11}, \frac{14}{11}, 0, 0)$.

La inversa de su base asociada es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

Reescribiendo x_B como se vio en clase:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{11} \\ \frac{14}{11} \end{bmatrix}$$

Quedan las siguientes ecuaciones:

Ec 1

$$x_1 - \frac{2}{11}x_3 + \frac{5}{11}x_4 = \frac{20}{11}$$

Ec 2

$$x_2 + \frac{3}{11}x_3 - \frac{2}{11}x_4 = \frac{14}{11}$$

Utilizaremos la **Ecuación 1** para hacer el corte. Le tomamos cajón inferior a la ecuación y obtenemos la siguiente restricción que será el corte a aplicar:

$$x_1 - x_3 \leq 1$$

Lo añadimos en el problema que teníamos, añadiéndole una variable de holgura ya que estamos trabajando en forma estándar. Queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & x_1 - x_3 + x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

De resolver este problema se llega a que el óptimo es $x^* = (2, 1, 1, 0, 0)$ el cual claramente pertenece a los enteros positivos, por tanto es el óptimo del problema entera. Así, el valor óptimo del problema original es $Z^* = 7$.

*También se podía utilizar la **Ecuación 2** para formar el corte y se llegaba al óptimo.

(b) *(1 pt)* Defina $GAP = Z_{RL} - Z_{PE}$, es decir, la diferencia entre el valor óptimo del problema relajado versus el valor óptimo del problema entero. ¿Es cierto que $GAP \geq 0$? Si es cierto, argumente. Si es falso, provea un contraejemplo.

R:
Calculamos $GAP = Z_{RL} - Z_{PE} = \frac{5}{11} = 0,45...$, simplemente reemplazando los óptimos relajado y entero respectivamente en la función objetivo y realizar la resta.

Sí, siempre es ≥ 0 para problemas de maximización, pues la región factible del problema entero es un subconjunto de la región factible relajada, por ende jamás podrá obtener un punto mejor (en términos de maximización, esto es más positivo) que el problema relajado.

(c) *(2 pts)* ¿Existe función de costos c' tal que $GAP = 0$? De ser así, encuentre c'.

R:
Acá había que cambiar la función objetivo para que al resolver el problema relajado y el entero el GAP sea cero.

Recordemos la región factible de nuestro problema, pues será útil para encontrar el vector

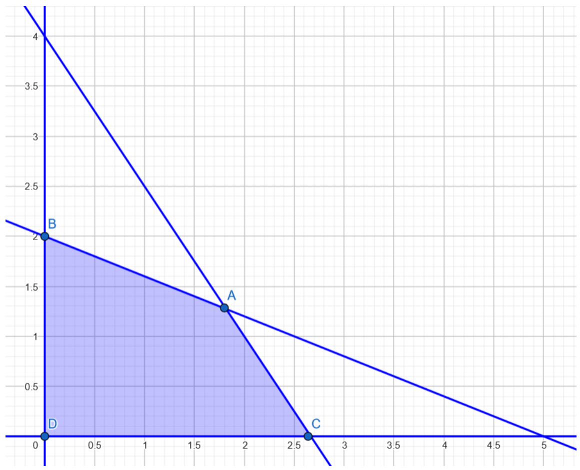

Fig. 5: Región Factible

Habían varias opciones, siendo la primera notar que si se encontraba un vector de costos tal que el óptimo relajado fuera alguno de los puntos enteros que son vértices en la región factible, este también sería un óptimo del entero y, por tanto, su GAP sería cero. Una opción es el vector $c = (0, 1)$ ya que así el óptimo sería el vértice $(0, 2)$.

Otra opción era notar que hay una restricción del problema (la segunda) que pasa por el óptimo relajado y por el óptimo entero, por lo que eligiendo un vector c con la misma pendiente el GAP sería cero también; este es el caso de $c = (3, 2)$.

También una alternativa notar que si la función objetivo era nula de manera lógica no habría GAP, pues ambos valores óptimos serían nulos, esto es $c = (0, 0)$

Identidades Útiles

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{5}{11} & 0 \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} & 0 \\ \frac{1}{11} & \frac{-19}{11} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ \frac{9}{5} & 1 & \frac{-11}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{-5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{-5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{-11}{3} \end{bmatrix}$$

Tablas Dualidad

Primal / Dual	óptimo finito	no acotado	infactible
óptimo finito	✓	×	×
no acotado	×	×	✓
infactible	×	✓	✓

✓ = posible, × = imposible

PRIMAL	minimizar	maximizar	**DUAL**
restricciones	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 libre	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 libre	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	restricciones