IN3171 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 10 - Cortes de Cover y TUM

Profesores: Azucena Orellana y Martín Valdevenito
Auxiliares: Nicolás Acevedo, Diego Cares, José Miguel González, Catalinea Leppe, Pedro Maldonado, Paz Meneses, Matías Muñoz, Mariana Quiroga, Germán Silva y Pablo Ubilla

P1. Totally Unimodular Matrix

1. Determine si las siguiente matrices son totalmente unimodulares:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea A una matriz totalmente unimodular. Demuestre que:

   (a) Todos los elementos de A son 0, 1 ó -1. ¿Es cierta la proposición recíproca, es decir, que todas las matrices con la totalidad de sus elementos iguales a 0,1 ó -1 son totalmente unimodulares? ¿Y para matrices con todos sus elementos iguales a 0 ó 1 ?

   (b) $A^\top$ también es totalmente unimodular.

   (c) $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ también es totalmente unimodular.

3. Dado un grafo dirigido $G = (N, E)$, con vector de capacidades $u \in \mathbb{Z}^{|E|}$, considere el problema de flujo máximo:

$$\begin{array}{lrcll} \max & x_{ts} & & & \\ \text{s.a} & -\sum_{j\in N:(i,j)\in E} x_{ij} + \sum_{j\in N:(j,i)\in E} x_{ji} & = & 0 & \forall i \in N \\ & x_{ij} & \leq & u_{ij} & \forall (i,j) \in E \\ & x_{ij} & \in & \mathbb{Z}_0^+ & \forall (i,j) \in E \end{array}$$

   (a) ¿Es totalmente unimodular la matriz del problema asociada a las restricciones de flujo?

   (b) Sea x^*_{RL} solución del problema de flujo máximo relajado ($x_{ij} \in \mathbb{R}_0^+$). Tomando esta solución como partida, Detalle un método para obtener la solución óptima del problema entero.

   (c) *(Propuesto)* Recuerde otros problemas clásicos del curso con variables enteras (flujo a costo mínimo, camino más corto, mochila, matching 1:1) y determine si sus matrices son totalmente unimodulares.

P2. Optimización Entera y cortes de Cover

Una empresa manufacturera produce K productos distintos en I fábricas distintas para abastecer a J centros de demanda.

Considere que producir el producto k en la fabrica i tiene un costo de producción variable igual a v_{ik} por unidad producida y un costo de set up (fijo) igual a f_{ik} y se demora un tiempo t_{ik}. Suponga además que debido a los periodos de mantención, la fábrica i tiene una capacidad de producción total durante el horizonte de planificación (en tiempo) igual a M_i.

Si se decide producir el producto k en la fábrica i se debe producir al menos una cantidad mínima igual a m_{ik}. Suponga además que existe una demanda d_{jk} por el producto k en el centro de demanda j y un costo variable C_{ijk} de transportar una unidad del producto k desde la fábrica i al centro de demanda j.

Para el transporte se disponen de suficientes camiones identicos. Cada camión tiene una capacidad W y un costo fijo de utilización igual a p. Finalmente suponga que para controlar la variabilidad en los productos se desea producir cada producto en a lo mas q fábricas distintas.

1. Escriba un problema de optimización entero mixto en el que se busque satisfacer la demanda en todos los centros al menor costo considerando todas las restricciones mencionadas.

2. Definamos un *cover* como un conjunto de productos que exceden la capacidad de una fábrica.

   - Escriba una expresión matemática que debe satisfacer un conjunto de productos para ser considerados un *cover*
   - Escriba las restricciones asociadas a estos *covers* para cada fábrica en la formulación del punto anterior.

3. De un ejemplo numérico que muestra que estas restricciones de *cover* fortalecen la formulación. Esto quiere decir que la restricción de *cover* elimina alguna solución fraccionaria del poliedro original. (Concéntrese en una fábrica chica y números que hagan un ejemplo simple)

Anexos

1. **Cálculo del Determinante de una Matriz:** Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, puede calcularse su determinante a partir de una fila a_i o una columna A_j como sigue:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{ij}|A_{-ij}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{ij}|A_{-ij}|,$$

   donde a_{ij} representa el elemento de la matriz A ubicado en la fila i, columna j, y A_{-ij} representa la submatriz de A de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que resulta de omitir la fila i y la columna j.

2. **Submatriz:** Una submatriz de alguna matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es cualquier matriz generada a partir de la eliminación de alguna(s) de sus filas/columnas.

3. **Matrices Totalmente Unimodulares (TUM):** Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es totalmente unimodular si toda submatriz cuadrada de A tiene determinante igual a $0, 1$ ó -1.

4. **Puntos y Poliedros Enteros:** Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es entero si $x \in \mathbb{Z}^n$. Un poliedro es entero si todos sus puntos extremos son enteros.

5. **Teorema:** Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz totalmente unimodular. Luego, para cualquier vector de lado derecho entero $b \in \mathbb{Z}^n$, $u \in \mathbb{Z}^n$, los poliedros $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$, y $P' = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ y $P' = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, u \geq x \geq 0\}$ son enteros.

6. **Definición de corte de cover**: Es un subconjunto $C \subseteq \{1, ..., n\}$ tal que $\sum_{i\in C} w_i > W$. Esto esta pensando para aplicar desigualdades validas en problemas con restricciones similares a las que se puede encontrar en el problema de la mochila, es decir, sumar variables binarias ponderadas por componentes no negativas y que sea menor e igual a otra componente no negativa.

7. **Desigualdad valida**: Una desigualdad válida es una restricción que elimina soluciones fraccionarias del problema, pero no elimina ninguna solución entera.

8. **Fortalecer una formulación**: Se dice que se ha logrado fortalecer una formulación si es que el valor óptimo relajado se ha logrado acercar al valor óptimo entero (se logra hacer que el gap tienda a 0).

9. **Formulación ideal**: Si el problema relajado es la envoltura convexa del problema entero se dice que dicha formulación es ideal.