Auxiliar 10: FGM, FC y Esperanza Condicional

Profesores: Charles Thraves y Natalia Trigo
Coordinadora: Monserrat Marchant
Auxiliares: Camila Carrasco, Leonardo Meneses
y Sebastián Rojas

13 de junio, 2023

Resumen

Covarianza: Sean X e Y v.a, se define su covarianza como:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Propiedades:

1.- $Cov(X,X) = Var(X)$

2.- Si X e Y son independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0$

3.- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

4.- $Cov(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$

Resumen

Correlación: Sean X e Y v.a, se define su correlación como:

$$\rho_{X,Y} = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Notar que $\rho_{X,Y} \in [-1,1]$

Sumas de VA independientes:

- Binomial(n,p) + Binomial(m,p) = Binomial$(n+m,p)$
- Normal(μ_1,σ_1^2) + Normal(μ_2,σ_2^2) = Normal$(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Resumen

Función Generadora de Momentos:
Sea X un v.a. Se define su FGM como

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$$

Teorema importante: Sean X, Y dos variables aleatorias tales que $\exists c > 0$ tal que $M_X(s) = M_Y(s)$, $\forall s \in [-c, c]$, entonces:

$$F_X(z) = F_Y(z), \ \forall z \in \mathbb{R}$$

Propiedad: Sea X variable aleatoria tal que existe su FGM, se tiene entonces para todo $s \in (-c, c)$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \left.\frac{\partial^n M_X(s)}{\partial s^n}\right|_{s=0}$$

Resumen

Función generadora de momentos de un vector aleatorio: Sea $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un vector aleatorio y $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, su FGM está dada por:

$$M_X(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[e^{\mathbf{s}^\top X}]$$

Función característica: (Al contrario de la FGM, siempre está definida).

$$\phi(\omega) = \mathbb{E}[e^{i\omega X}]$$

Propiedad: Si X_1, ..., X_n son VA independientes, entonces

$$M_{X_1+...+X_n}(s) = M_{X_1}(s) \cdots M_{X_n}(s)$$

$$\phi_{X_1+...+X_n}(\omega) = \phi_{X_1}(\omega) \cdots \phi_{X_n}(\omega)$$

Resumen

FGM y FC conocidas:

Distribución	$M(s)$	$\phi(\omega)$
Binomial(n,p)	$(pe^s + 1 - p)^n$	$\left(pe^{i\omega} + 1 - p\right)^n$
Poisson (λ)	$e^{\lambda(e^s-1)}$	$e^{\lambda\left(e^{i\omega}-1\right)}$
Geométrica (p)	$\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$	$\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega}}$
BinomialNegativa(n,p)	$\left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^n$	$\left(\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega\omega}}\right)^n$
Uniform $[a,b]$	$\frac{e^{bs}-e^{as}}{s(b-a)}$	$\frac{e^{ib\omega}-e^{ia\omega}}{i\omega(b-a)}$
Exponential (λ)	$\frac{\lambda}{\lambda-s}, \lvert s\rvert < \lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda-i\omega}$
Normal (μ,σ^2)	$e^{\mu s+\frac{\sigma^2 s^2}{2}}$	$e^{i\mu\omega-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

Resumen

Esperanza condicional:

- **Caso continuo:**

$$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y)dx$$

- **Caso discreto:**

$$E[X \mid Y = y] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x \mid y)$$

Propiedad: Sean X,Y v.a. independientes, entonces:

$$E[g(X)|Y] = E[g(X)]$$

Resumen

Ley de Esperanza Total:

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = E_Y[E_X[X \mid Y]]$$

- **Caso continuo:**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X \mid Y = y] \cdot f_Y(y) dy$$

- **Caso discreto:**

$$E[X] = \sum_{y \in R_Y} E[X \mid Y = y] \cdot p_Y(y)$$

Problema 1 [Examen 2021-2]

¡Jo Jo Jo! Ha llegado la navidad al IN3141 y para ello necesitamos su ayuda. El equipo docente decidió realizar una cena navideña para el curso. Para lo anterior, se hace una colecta para recaudar dinero con el cual se compran los bebestibles. Dado que la fiesta navideña se realiza todos los años, se sabe que la cantidad total de litros de bebestible L que se compra distribuye uniforme continua entre cero y k.

Además, **de los bebestibles**, hay uno que es de particular interés para la fecha, el *cola de mono*. Se sabe que los litros de bebestible que corresponden específicamente a *cola de mono* es una variable aleatoria X que sigue una distribución uniforme continua entre cero y la cantidad total de bebestible. Solo a modo de aclaración, note que la cantidad de litros de *cola de mono* es parte de la cantidad total de bebestible; sin embargo, no necesariamente todos los litros de bebestible son de *cola de mono*.

Problema 1 [Examen 2021-2]

Hint: Le pueden ser de utilidad las siguientes integrales

$$\int \ln(y) \cdot dy = y(\ln(y) - 1) + C$$

$$\int \ln(y) \cdot y \cdot dy = \frac{y^2(2\ln(y) - 1)}{4} + C$$

donde C es una constante de integración.

(a) Grafique el rango conjunto de las variables aleatorias (X, L).

(b) Calcule la PDF conjunta del par $(X,\ L)$. Obvie los casos en que $l = 0$ o $x = 0$.

(c) Calcule la densidad marginal de X. Obvie el caso en que $x = 0$.

(d) Calcule la covarianza entre X y L.

Problema 2 [Examen 2022-1]

El local *Lucky Cat* es muy famoso por vender papas fritas a un bajo precio. Para asegurar que los locales que venden comida cumplen con las medidas de higiene y salubridad, la municipalidad dispone del *Organismo Municipal Fiscalizador de Salubridad* (OMFS), cuya función es verificar si es que dichos locales, tales como *Lucky Cat*, cumplen las medidas mínimas de salubridad.

Específicamente, al inicio de **cada hora del día**, **todos los días de la semana**, el OMFS inspecciona si es que el local esta limpio. Motivo de lo anterior, *Lucky Cat* ha contratado a don Fermín, quien está encargado de hacer el aseo en el local en el último minuto **de cada hora**, lo cual le toma exactamente un minuto. A modo de ejemplo, si don Fermín hace el aseo a las 16:59, y luego el OMFS inspecciona el local a las 17:00, el OMFS aprueba el funcionamiento del local y éste puede seguir funcionando (al menos por una hora más).

Problema 2 [Examen 2022-1]

El jefe del local se da cuenta de que cada vez que don Fermín tiene que realizar el aseo, es decir al final de cada hora, hay una probabilidad q de que don Fermín olvide su labor y por ende no haga el aseo cuando le corresponde hacerlo. Además, dichas probabilidades son independientes entre diferentes horas. Nuevamente a modo de ejemplo, si a don Fermín se le olvida hacer el aseo a las 14:59, entonces cuando el OMFS visite el local a las 15:00, éste se clausurará y no podrá seguir funcionando.

Problema 2 [Examen 2022-1]

Cada hora, *Lucky Cat* recibe una demanda en unidades de *porciones de papas fritas*. La demanda en la i-ésima hora se puede descomponer en dos partes: una demanda basal X_0 que sigue una distribución Normal con media μ y varianza σ_0^2, y una demanda específica X_i que sigue una distribución Normal con media 0 y varianza σ_1^2. La demanda en la i-ésima hora es entonces $X_0 + X_i$. La demanda basal y las demandas específicas son todas independientes, es decir, las variables aleatorias $X_0, X_1, X_2, \ldots$ son todas independientes.

Problema 2 [Examen 2022-1]

Además de lo mencionado, haga los siguientes supuestos:

- Una vez clausurado el local, éste no vuelve a abrir.
- El local abre a las 10:00 del día Viernes 15 de Julio de 2022, y no cierra nunca por voluntad propia, sino que solo cierra si es que el local es clausurado por el OMFS.
- El local se ensucia en toda hora de funcionamiento, independiente del nivel de la demanda durante dicha hora, de tal manera que si no se hace el aseo al final de la hora respectiva, el local será clausurado por el OMFS.
- El local parte limpio (por ende cuando el OMFS visita el local en el primer minuto de operación, i.e., a las 10:00 del día Viernes 15 de Julio de 2022, el local es aprobado para su posterior funcionamiento (de al menos la siguiente hora).

Problema 2 [Examen 2022-1]

a) Considere que el local atiende **exactamente** durante seis horas. Determine la distribución de probabilidad que sigue la suma de las demandas durante este lapso de tiempo. Si la distribución de probabilidad es conocida, es decir, fue vista en clases, especifique sus parámetros.

(b) Encuentre la correlación entre las demandas de dos horas diferentes en las que el local está funcionando.

(c) Calcule la esperanza de la **demanda total** por *porciones de papas fritas*, es decir, la demanda durante todas las horas de operación.

Note que en la parte (c), a diferencia de la parte (a), el número de horas que opera el local podría variar.

Problema 3

Matías y Humberto decidieron participar en un juego que consiste en que cada jugador lanza dos dados de manera independiente, y si suman 10 o más se gana un peluche.

a) Sea X el valor de la suma de los dados. Encuentre la FGM de X.

b) **[Propuesto]** Calcule la PMF de X usando convolución, y encuentre la probabilidad de ganar en cada intento.

Suponga que Matías pagó para tener m intentos y Humberto pagó para tener n intentos. Sea Y el número de peluches que se ganan entre los dos.

c) Determine la FGM de Y.

d) A partir de la FGM de Y, encuentre el valor de $\mathbb{E}(Y)$ y $Var(Y)$.

Fin del Auxiliar

¡Gracias por venir!