Auxiliar #4

Variable aleatoria discreta I

Resumen

- Variable Aleatoria Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una **Variable Aleatoria**. Denotamos $R_X = \{x \in \mathbb{R} : X = x > 0\}$ como el rango de X: los valores que la variable aleatoria puede tomar.

- Función de masa de probabilidad Se define la **función de masa de probabilidad** (PMF: *Probability Mass Function*) para cada variable aleatoria X, como:

$$p_X(x) = P(X = x) \ \forall x \in R_X$$

- Función de distribución acumulada Se define la **función de distribución acumulada** (CDF: *Cumulative Distribution Function*) para cada variable aleatoria X, como:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Propiedades de CDF Para toda variable aleatoria X, se tiene que:

  1. $F_X(x)$ es creciente en x.
  2. $$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$
  3. $$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$
  4. Para X variable aleatoria discreta, se tiene que para todo $x \in R_X$, existe un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para el cual

$$p_X(x) = F_X(x) - F_X(x - \varepsilon)$$

- Esperanza de una VA Para cada variable aleatoria, se define su **valor esperado o esperanza**, como:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

  Observación:

  1. Puede ocurrir que $\mathbb{E}[X] = +\infty$.
  2. A veces se denota $\mathbb{E}[X] := \mu_X$

- Propiedades de la esperanza: Para cualquiera X, Y variables aleatorias, y $\lambda \in \mathbb{R}$ no aleatorio, tenemos que:

  1. Es lineal: $\mathbb{E}[X + \lambda Y] = \mathbb{E}[X] + \lambda \mathbb{E}[Y]$
  2. Si X, Y son independientes, entonces $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

- Esperanza de una función de una v.a. Se tiene que:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) \cdot p_X(x)$$

  Dato curioso: Esto es una propiedad y no una definición (para los curiosos, buscar *Law of the Unconscious Statician* [LOTUS].

- Varianza de una VA Se define, para una variable aleatoria, su **varianza**, como:

$$\text{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

- Propiedades de la varianza Para cualquiera X, Y variables aleatorias, y $a, b \in \mathbb{R}$ no aleatorios, tenemos que:

  1. $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
  2. $Var(aX + B) = a^2 Var(X)$
  3. Si X, Y son independientes, entonces $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

  donde $\mathbb{E}[X^2]$ se calcula usando la esperanza de la función $g(t) = t^2$.

- Desviación estándar Se define, para una variable aleatoria, su **desviación estándar**, como:

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Coeficiente de variación Para una variable aleatoria X, definimos su **coeficiente de variación**, como

$$CV(X) = \frac{SD(X)}{\mathbb{E}[X]}$$

Distribuciones conocidas:

- **Bernoulli:** Sea $\mathrm{X} \in \{0,1\}, \mathrm{P(X=1)=p, P(X=0)=1-p, E[X]=p} \quad \mathrm{Var(X)=p(1-p)}$
- **Binomial:** Sea $\mathrm{X} \sim \mathrm{bin}(n,p), \mathrm{P(X=k)} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}, \mathrm{E[X]=np, Var[X]=np(1-p)}$
- **Hipergeométrica:** $\mathrm{X} \sim$ Hipergeométrica $\mathrm{(N,K,n)}$ con $\mathrm{N,K,n} \in \mathbb{Z}_+, \mathrm{K,n} \leq \mathrm{N}, R_x = \{\max\{0, n+K-N\}, \ldots, \min\{K,N\}\}$, con PMF

$$P_X(k) = \frac{\begin{pmatrix} K \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{con\, E[X]=n}\frac{K}{N}\mathrm{y\; Var[X]=n}\frac{K}{N}\frac{(N-K)}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

Pregunta 1

Se lanza un dado equilibrado con n caras enumeradas de 1 a n, y se anota el resultado obtenido. El procedimiento se repite hasta que se obtiene un resultado que ya se anotó en algún lanzamiento previo. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad total de lanzamientos.

a) ¿Cuál es el rango de X?

b) Calcula su función de probabilidad p_X si $n = 2$ (puede interpretar que es una moneda en vez de un dado).

c) Calcule su función de probabilidad p_X para el caso genérico.

Pregunta 2

La empresa *Júpiter* produce termómetros infrarrojos. Cada termómetro producido queda bien calibrado con una probabilidad de p, en cuyo caso el termómetro, al ser usado, siempre indicará la temperatura correcta (o real) del objeto al cual se le mide su temperatura. En caso de que el termómetro quede mal calibrado, éste entregará un valor desviado por δ grados Celsius respecto a la temperatura real del objeto. Asuma que en ambos casos, donde la lectura de la temperatura se desvía por **sobre** o **bajo** δ grados Celsius, son equiprobables (en el caso de que el termómetro quede mal calibrado[1]). Llamaremos al parámetro δ el *error*.

La empresa *Bedebueno* testea los termómetros producidos por la empresa *Júpiter*. Específicamente, mide la temperatura de un objeto que está a una temperatura (real) de a grados Celsius con un termómetro producido por la empresa *Júpiter*. Llame X a la temperatura que entrega la lectura con un termómetro producido por la empresa *Júpiter*.

Asuma que $a > 0$, $\delta > 0$, y $p \in (0,1)$.

(a) Entregue la CDF de la VA X. Además, grafíquela.

(b) *Bedebueno* está implementando una certificación de calidad, la cual se entrega a la empresa que produce los termómetros, en el caso de que esta última cumpla con el criterio establecido. En particular, dicho criterio consiste en que los termómetros producidos por la empresa, al medir la temperatura de un objeto a temperatura real de a grados Celsius, deben tener una desviación estándar menor o igual a $\delta/2$. Indique las condiciones de los parámetros del problema (p, a, y/o δ) de tal modo que *Júpiter* reciba la certificación.

(c) Suponga que la empresa *Júpiter* está considerando arrendar una tecnología que le permita controlar el *error* de la lectura del termómetro. El precio de arriendo de dicha tecnología es de $\$\lambda/\delta$ por cada termómetro producido con un *error* de δ (donde $\lambda > 0$ es un parámetro fijo y conocido). Además, considere que ahora *Júpiter* debe pagar en reparación un monto de $\$c \cdot \delta$ por cada termómetro malo que tenga una lectura de δ grados Celsius por **sobre** o **bajo** la temperatura real del objeto al cual se le mide su temperatura.

(i) Dado un parámetro fijo de *error* igual a $\delta > 0$, obtenga el costo esperado de producir un termómetro (incluya todos los costos asociados, es decir, de arriendo de tecnología y de reparación).
Hint: Le podría ser de utilidad escribir el costo como una expresión que dependa de la VA X.

(ii) Considerando que *Júpiter* puede escoger cualquier valor no negativo para el parámetro de *error* a contratar con la nueva tecnología, indique el valor óptimo que debería utilizar.

Pregunta 3

Un jugador de emboque se inscribe a un torneo durante las fiestas patrias. El jugador tiene 10 intentos, y la probabilidad de acertar es de 0.2 (cada intento es independiente).

a) Calcule la PMF de X

b) ¿Cuál es la probabilidad de no acertar en ningún intento?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte más veces de las que falla?

d) Calcule la Esperanza y Varianza de X.

e) **Propuesto:** Suponga que el jugador tiene que pagar \$3 para entrar al torneo y que gana \$2 por cada acierto. Sea Y su ganancia, encuentre su Esperanza y Varianza.

f) **Propuesto:** Ahora suponga que no tiene que pagar para entrar al torneo y que su ganancia es el número de aciertos al cuadrado. Si Z es su ganancia, encuentre la Esperanza de Z.