Tarea 4

P1

Nos dicen que tomemos $\epsilon = \epsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2)$ y $\mu=\mu_0$. En un medio sin carga ni conductividad $(\rho=g=0)$ tenemos las ecs. de Maxwell en materiales

$$(i)\ \nabla\cdot\vec{D}=0 \qquad (iii)\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(ii)\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad (iv)\ \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

como es un material lineal $\vec{E}=\epsilon\vec{D}$ y $\vec{B}=\mu\vec{H}$

$$(i) \rightarrow \nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad (iv)\ \nabla\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Usando los ansatz entregados $\tilde{\vec{E}} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{y}$ ^ $\tilde{\vec{B}} = B_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{k}$, debido a (i) tenemos

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial(E_0e^{i(kx-\omega t)})}{\partial y} = 0$$

Usando (ii) $\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\partial}{\partial z}(B_0e^{i(kx-\omega t)}) = 0$, que tampoco entrega nueva información, mientras que con (iii)

$$\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\Leftrightarrow -\cancel{\frac{\partial E(x,t)}{\partial z}}\,\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}\hat{k} = +i\omega B_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow ikE_0 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}}\,\cancel{\hat{k}} = i\omega B_0 \cancel{e^{i(kx-\omega t)}}\,\cancel{\hat{k}}$$

$$\Leftrightarrow kE_0 = \omega B_0 \quad (v)$$

y usando (iv) $\nabla\times\vec{B} = \mu\epsilon\dot{\vec{E}} \Leftrightarrow -\frac{\partial B(x,t)}{\partial x}\hat{\jmath} = -i\omega\mu\epsilon E_0 e^{i(kx-\omega t)}\hat{\jmath}$

$$\Leftrightarrow -ikB_0\cancel{e^{i(kx-\omega t)}} = -i\omega\mu\epsilon E_0\cancel{e^{i(kx-\omega t)}}$$

$$\Leftrightarrow kB_0 = \omega\mu\epsilon E_0 \quad (vi)$$

usando (v) y (vi) $\frac{\omega B_0}{k} = \frac{kB_0}{\omega\mu\epsilon} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{k^2}{\mu\epsilon} = \frac{k^2}{\mu\epsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2)} \Leftrightarrow \omega^2-\omega_p^2 = \frac{k^2}{\mu\epsilon_0}$ (I) $\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon_0}+\omega_p^2}$ (II) de (I) notamos que si $\omega > \omega_p \Rightarrow k \in \mathbb{R}$ y los cpos son campos viajeros en la dirección de $\hat{\imath}$, mientras que si $\omega < \omega_p \Rightarrow k \in \mathbb{C}$ y las ondas ya no viajan y se atenuan en la dirección de $\hat{\imath}$

b) De (25) tenemos la relación $E_0 = \frac{\omega(k)}{k} B_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon_0} + \left(\frac{\omega_p}{k}\right)^2}\; B_0$

P2

a) Tenemos que como $\vec{E}$ es isotrópico (no depende de la dirección) no puede depender explícitamente de θ ni ϕ, o sea solo puede depender de la distancia r al origen. Por enunciado nos dicen que consideremos $E_r = E_\phi = 0$ así que la componente en θ, $E_\theta(r,t)$, va a seguir la ec. de onda

$$\nabla^2 E_\theta(r,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_\theta(r,t)}{\partial t^2} \iff \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial r} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2} \iff \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r E_\theta) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial t^2}$$

esta es una EDP que podemos resolver usando el método de separación de variables definiendo $E_\theta(r,t) = R(r)T(t)$,

$$\iff T(t)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR(r)) = \frac{1}{v^2}R(r)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \qquad /\cdot \frac{1}{R(r)T(t)}$$

$$\iff \frac{1}{rR(r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR(r)) = \frac{1}{v^2}\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2$$

con lo que obtenemos dos EDOs separadas

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR(r)) = -k^2 rR(r) \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + k^2 v^2 T(t) = 0 \quad \text{oscilador armónico}$$

usando que $v = \omega/k$ tenemos que la segunda EDO tiene como solución $T(t) = c_1 e^{i\omega t}$ mientras que para la primera usamos como ansatz que la solución es de la forma $R(r) \propto \frac{1}{r}e^{\pm i\alpha r}$, reemplazamos

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{1}{r}e^{\pm i\alpha r}\right) = -k^2 r\frac{1}{r}e^{\pm i\alpha r} \iff -\alpha^2 e^{\pm i\alpha r} = -k^2 e^{\pm i\alpha r} \quad \therefore \alpha = k$$

$$\therefore R(r) = \frac{c_2}{r}e^{-ikr}, \quad T(t) = c_1 e^{i\omega t} \Rightarrow E_\theta(r,t) = R(r)T(t) = \frac{E_0}{r}e^{i(\omega t - kr)}$$

b) Usamos las ecs. de Maxwell en el vacío usando como ansatz que $\vec{B}$ solo tiene componente en $\hat{\phi}$ (ya que $\vec{E}$ tiene componente en $\hat{\theta}$ y viaja en la dirección de $\hat{r}$) y que tiene el mismo tipo de oscilación

$$\Rightarrow \tilde{\vec{B}} = \tilde{B}(r)e^{i(\omega t - kr)}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \iff \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{E}_\theta(r,t))\hat{\phi} = -i\omega\tilde{B}(r)e^{i(\omega t - kr)}\hat{\phi} \iff \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(E_0 e^{i(\omega t - kr)}\right)\hat{\phi} = -i\omega\tilde{B}(r)e^{i(\omega t - kr)}\hat{\phi}$$

$$\iff \frac{-ik}{r}E_0\cancel{e^{i(\omega t - kr)}} = -i\omega\tilde{B}(r)\cancel{e^{i(\omega t - kr)}} \iff \frac{k}{r}E_0 = \omega\tilde{B}(r) \Rightarrow \tilde{B}(r) = \frac{kE_0}{\omega r}$$

$$\therefore \tilde{\vec{B}}(r,t) = \frac{kE_0}{\omega r}e^{i(\omega t - kr)}\hat{\phi}$$

c) Identificamos que la velocidad de propagación es $v = \frac{\omega}{k}$, la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la frecuencia $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$