Examen

P1

a) Tenemos $\tilde{\vec{B}} = B_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath} + B_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\jmath}$, con $B_i \in \mathbb{R}$. Debido a que tenemos la relación

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}}{\omega} = \frac{k\hat{k}\times\tilde{\vec{E}}}{\omega} \quad (1)$$

usamos el ansatz que el cpo eléctrico es de la forma

$$\tilde{\vec{E}} = E_1 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\imath} + E_2 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath} \quad (2)$$

reemplazando esto en (1) tenemos

$$\frac{k}{\omega}\hat{k}\times\left(E_1 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\imath} + E_2 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath}\right) = \frac{k}{\omega}E_1 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\jmath} - \frac{k}{\omega}E_2 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath}$$

$$= B_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\imath} + B_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\jmath}$$

donde comprobamos que está bien nuestro ansatz y obtenemos relaciones entre E_i y B_i

$$E_1 = \frac{\omega}{k}B_2 \quad y \quad E_2 = -\frac{\omega}{k}B_1$$

por lo que el cpo. eléctrico sería $\tilde{\vec{E}} = \frac{\omega}{k}B_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{\imath} - \frac{\omega}{k}B_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{\jmath} \quad (2)$

Ahora, tomamos la parte real de $\tilde{\vec{E}}$ y $\tilde{\vec{B}}$

$$\triangleright\ \vec{E} \equiv Re\{\tilde{\vec{E}}\} = \frac{\omega}{k}B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\imath} - \frac{\omega}{k}B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\jmath}$$

$$\triangleright\ \vec{B} \equiv Re\{\tilde{\vec{B}}\} = B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\imath} + B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\jmath}$$

Con lo que el vector de Poynting es

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\omega}{k\mu_0}\left[B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\imath} - B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\jmath}\right]\times\left[B_1\cos(kz-\omega t)\hat{\imath} + B_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{\jmath}\right]$$

$$= \frac{\omega}{k\mu_0}\left[B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos^2(kz-\omega t)\right]\hat{k}$$

El promedio temporal de $\vec{S}$ se calcula como $\langle S\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)dt$ con $T = 2\pi/\omega$

$$\Rightarrow \langle S\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\frac{\omega}{k\mu_0}\left[B_2^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t-\phi)dt + B_1^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t)dt\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\omega^2}{2\pi k\mu_0}\left[-\frac{B_2^2}{\omega}\int_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi}\cos^2(\Omega)d\Omega - \frac{B_1^2}{\omega}\int_{kz}^{kz-2\pi}\cos^2(\Omega')d\Omega'\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi k\mu_0}\left[-\frac{B_2^2}{2}(\Omega+\sin\Omega\cos\Omega)\Big|_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi} - \frac{B_1^2}{2}(\Omega'+\sin\Omega'\cos\Omega')\Big|_{kz}^{kz-2\pi}\right]\hat{k}$$

$$= \frac{\omega}{2k\mu_0}\left[B_2^2+B_1^2\right] = \frac{k}{2\omega\mu_0}\left[E_2^2+E_1^2\right]$$

b) Necesitamos demostrar que se cumple $\nabla\cdot\vec{S} + \partial_t u = 0$ para este caso, donde

$$\nabla\cdot\vec{S} = \frac{\omega}{k\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos^2(kz-\omega t)\right]$$

$$= -\frac{2\omega}{\mu_0}\left[B_2^2\cos(kz-\omega t-\phi)\sin(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos(kz-\omega t)\sin(kz-\omega t)\right] \quad (3)$$

entonces necesitamos $u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\frac{\omega^2}{k^2}\left(B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi) + B_1^2\cos^2(kz-\omega t)\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_1^2\cos^2(kz-\omega t) + B_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi)\right)\right)$$

usamos que $k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$

$$= \frac{B_1^2}{\mu_0}\cos^2(kz-\omega t) + \frac{B_2^2}{\mu_0}\cos^2(kz-\omega t-\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\omega}{\mu_0}\left[B_1^2\cos(kz-\omega t)\sin(kz-\omega t) + B_2^2\cos(kz-\omega t-\phi)\sin(kz-\omega t-\phi)\right] \quad (4)$$

$\therefore \nabla\cdot\vec{S} + \partial_t u = (3) + (4) = 0$, así que se cumple la conservación

c) Tenemos $\vec{E} = \frac{\omega}{k}B_0\sin(kz)\hat{\imath} - \frac{\omega}{k}B_0\cos(kz)\hat{\jmath}$

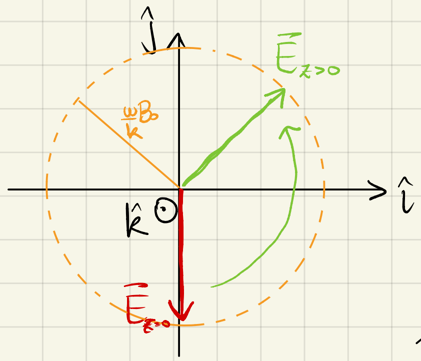
$$\vec{B} = B_0\cos(kz)\hat{\imath} + B_0\sin(kz)\hat{\jmath}$$

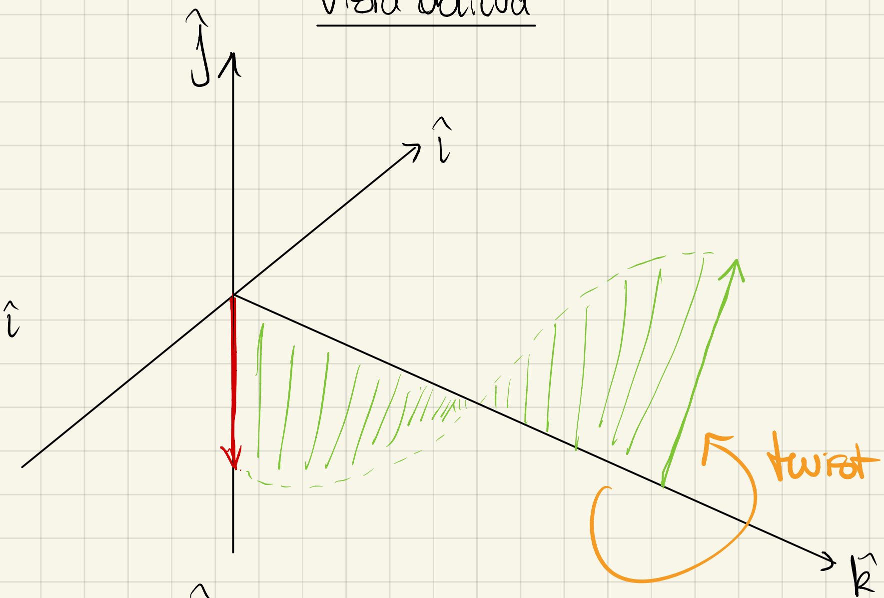
por lo que la polarización se va torziendo mientras se avanza en z

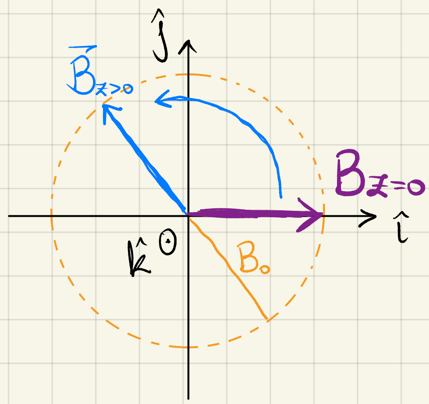
Por separado se ven como:

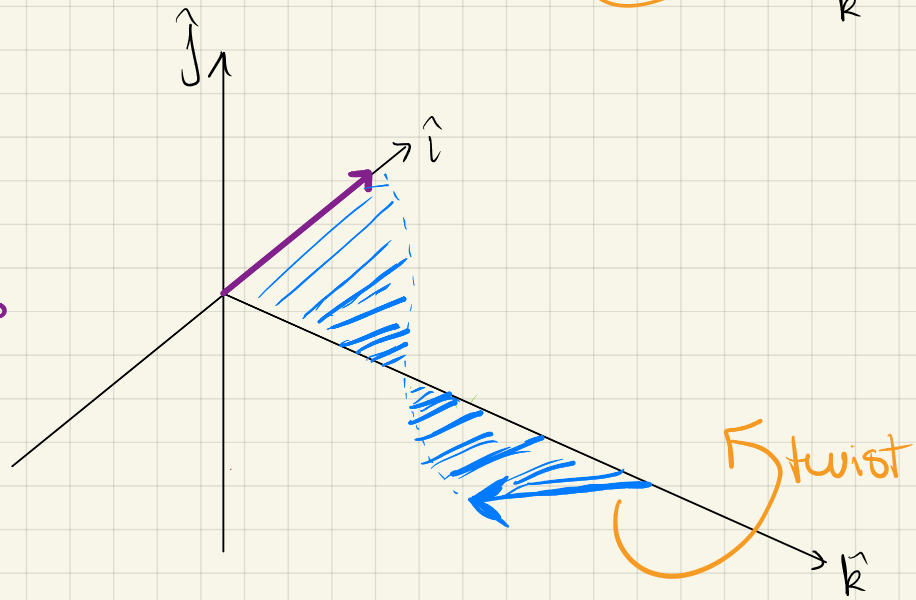
Vista de frente

Vista oblicua









Mientras que juntos