

Auxiliar 14

Ecs. de Maxwell y ondas EM

Profesor: Simón Riquelme

Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi

Ayudante: Bruno Pollarolo

P1.-

Considere una onda electromagnética que viaja en la dirección z en el vacío, el cual posee un campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = E_1 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + E_2 e^{i(kz - \omega t - \phi)} \hat{y}$$

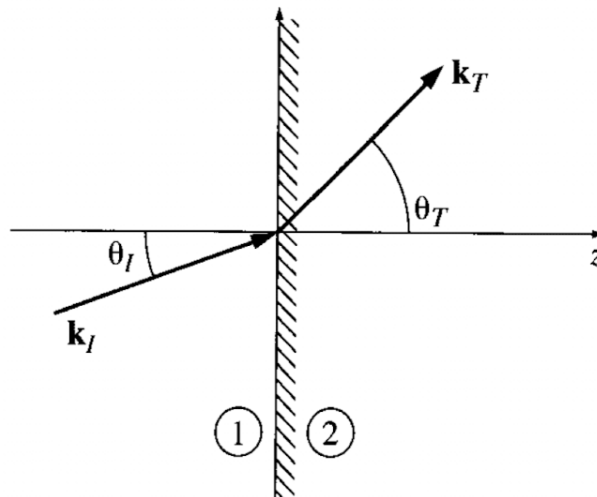
donde E_1 y E_2 son números reales. Determine el campo magnético asociado a esta onda electromagnética y el promedio temporal de Poynting

P2.-

De acuerdo con la Ley de Snell, cuando la luz pasa desde un medio óptico denso a uno menos denso ($n_1 > n_2$) el vector de propagación $\vec{k}$ dobla alejándose de la normal (ver figura). En particular, si la luz incide en la interfaz con el ángulo crítico

$$\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1),$$

entonces $\theta_T = 90^\circ$. Si θ_I excede θ_c , no hay luz refractada, solo reflejada (reflexión interna total). Pero los *campos* no son nulos en el medio 2; lo que obtenemos son ondas llamadas **ondas evanescentes**, las cuales rápidamente se atenúan y no transportan energía hacia el medio 2.



Una forma de modelar una onda evanescente es considerar

$$\vec{k}_T = k_T(\sin \theta_T \hat{x} + \cos \theta_T \hat{z}),$$

donde $k_T = \omega n_2 / c$ y el único cambio es que

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I$$

ahora es mayor que 1, y

$$\cos \theta_T = \sin 1 - \sin^2 \theta_T = i\sqrt{\sin^2 \theta_T - 1}$$

es imaginario. (¡Ya no podemos interpretar θ_T como un ángulo!)

a) Muestre que

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_{0T} e^{-\kappa z} e^{i(kx - \omega t)},$$

donde

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_I)^2 - n_2^2} \text{ y } k \equiv \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_I.$$

Es una onda propagándose en la dirección x (paralelo a la interfaz), y atenuada en la dirección z

b) En el caso de polarización perpendicular al plano de incidencia, muestre que los campos evanescentes (reales) son

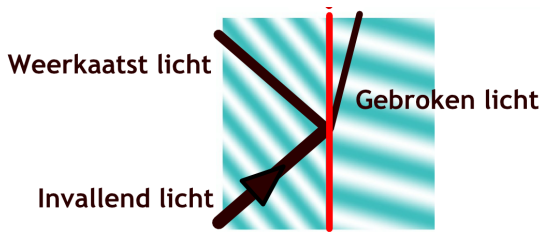
$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= E_0 e^{-\kappa z} \cos(kx - \omega t) \hat{y}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{E_0}{\omega} e^{-\kappa z} [\kappa \sin(kx - \omega t) \hat{x} + k \cos(kx - \omega t) \hat{z}] \end{aligned}$$

c) Demuestre que estos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell

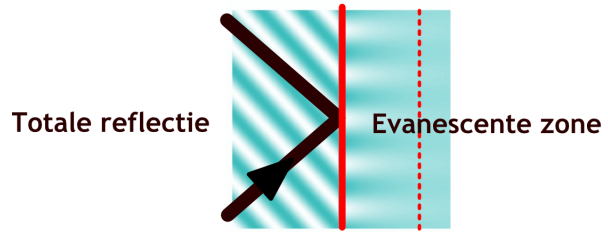
d) Para estos campos, calcule el vector de Poynting y muestre que, en promedio, no hay energía transmitida en la dirección de z

Hint: Para el ítem b) ocupe que los campos transmitidos están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}}_T(\vec{r}, t) &= \tilde{\vec{E}}_{0T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{y} \\ \tilde{\vec{B}}_T(\vec{r}, t) &= \frac{n_2}{c} \tilde{\vec{E}}_{0T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} (-\cos \theta_T \hat{x} + \sin \theta_T \hat{z}) \end{aligned}$$



(a) Cuando hay refracción no hay ondas evanescentes



(b) Cuando no hay refracción (reflexión total) hay presencia de ondas evanescentes

Formulario

Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell están dadas por

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\end{aligned}$$

estas expresiones son válidas **para cualquier medio**, tanto vacío como medio material.

Sin embargo, si estamos trabajando en un medio material puede ser útil utilizarlas de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho_f, & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Ondas electromagnéticas

Una onda electromagnética puede modelarse de forma general como

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)},$$

donde usamos funciones imaginarias para simplificar el cálculo.

Un campo eléctrico que cambia en el tiempo produce un campo magnético que cambia en el tiempo (y viceversa) dado por

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}.$$

Los vectores sin tilde son la parte real del vector con tilde, $\vec{E} = \text{Re}\{\tilde{\vec{E}}\}$.

La energía transportada por una onda EM (cambiante en el tiempo) se expresa con el vector de Poynting $\vec{S}$ dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H},$$

su promedio en el tiempo se calcula usando

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt, \quad \text{con } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

donde nos fijamos en un punto (x, y, z) fijo, de forma que estas coordenadas *no dependen* del tiempo en la integral.