Tarea 2

P1

En presencia de materiales dieléctricos, se inducen cargas de polarización dadas por

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}\ ; \qquad \rho_b = -\nabla\vec{P}$$

donde $\vec{P}$ es la polarización del medio.

En este caso nos dan la polarización en coordenadas cartesianas

$$\vec{P}_x = (ax^2+b)\,\hat{\imath}$$

Entonces las densidades de carga inducidas serían

- $\sigma_b(x=0) = \vec{P}_x(x=0)\cdot(-\hat{\imath}) = b\hat{\imath}\cdot(-\hat{\imath}) = -b$
- $\sigma_b(x=L) = \vec{P}_x(x=L)\cdot\hat{\imath} = (aL^2+b)\,\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = aL^2+b$
- $\rho_b = -\nabla\vec{P} = -\dfrac{\partial P_x}{\partial x} = -2ax$

Estas son densidades, así que para las cargas totales integramos cada una

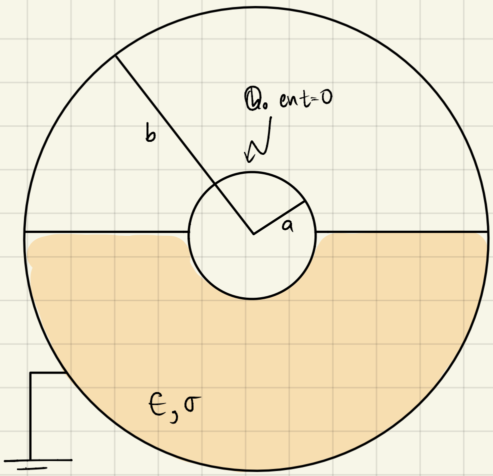
- $Q_{\sigma_b}(x=0) \equiv \iint \sigma_b(x=0)\,ds = -b\cdot A$
- $Q_{\sigma_b}(x=L) \equiv \iint \sigma_b(x=L)\,ds = (aL^2+b)A$
- $Q_{\rho_b} \equiv \iiint \rho_b(x)\,dv = \iiint -2ax\,dx\underbrace{dy\,dz}^{\iint dydz = A} = -A\int_0^L 2ax\,dx = -Aa\,x^2\Big|_0^L = -AaL^2$

Y la carga total de toda la vara sería la suma de cada contribución

$$Q_{TOT} = Q_{\sigma_b}(x=0) + Q_{\sigma_b}(x=L) + Q_{\rho_b} = 0$$

, que es lo que nos piden demostrar □

P2



a) Similar al Aux 8, integramos la ec. de continuidad en un volumen de una esfera de radio $r > a$

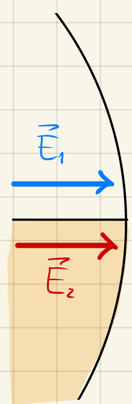
$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad // \int_{\upsilon} d\tau'$$

$$\Leftrightarrow \int_{\upsilon} \nabla \vec{J} \, d\upsilon' = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau'$$

$$\Leftrightarrow \oiint_{\partial \upsilon} \vec{J} \cdot d\vec{S}' = -\frac{d}{dt} \int_{\upsilon} \rho(\vec{r}) d\tau' \equiv -\frac{d}{dt} Q(r,t) \quad (1)$$

donde definimos $Q(r,t) = \int_{\upsilon} \rho \, d\tau'$ como la carga total dentro de la esfera de radio r.

Ahora, por simetría del problemas (cascarones esféricos y concéntricos), el campo eléctrico solo apuntaría en $\hat{r}$ y dependería solo de r, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, pero como tenemos la mitad del "condensador" con un material dieléctrico y la otra mitad con vacío, a priori podríamos tener un campo eléctrico diferente para cada sección



Pero por condiciones de borde $E^{\parallel}_{above} = E^{\parallel}_{below} \Rightarrow E_1 = E_2$

$\therefore$ El cpo. es el mismo dentro del condensador para un mismo r

Volviendo a (1), considerando el material naranja como óhmico, tenemos la relación

$$\vec{J}_i(\vec{r}) = \sigma_i \vec{E}(\vec{r})$$

por lo que si $\vec{E}$ es simétrico (vale lo mismo en magnitud para un mismo r), entonces $\vec{J}$ también así que puede salir de la integral de (1). Sin embargo, en la parte "superior" no hay material, por lo que la conductividad para $\theta \in (0, \pi/2)$ sería 0 y $\vec{J}$ también, así que la integral sería

$$\oiint_{\partial \upsilon} \vec{J} \cdot d\vec{S}' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cancel{J_1(r)}^{\,0} r^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} J_2(r) r^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

$$= J_2(r) r^2 \, \phi' \Big|_0^{2\pi} \cdot -\cos\theta' \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2\pi r^2 J_2(r)$$

y usando que $J_2(r) = \sigma E(r) \Rightarrow \oiint_{\partial \upsilon} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 2\pi \sigma r^2 E(r)$

$$(1): \quad 2\pi\sigma r^2 E(r) = -\frac{d}{dt} Q(r,t) \quad (2)$$

así que debemos expresar E en función de Q para obtener una EDO para $Q(t,r)$.

Como tenemos un material dieléctrico, usaremos Ley de Gauss modificada

$$\oiint_{\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre} = Q_\ell(r,t) \quad (3)$$

y como tenemos la relación $\vec{D}=\epsilon\vec{E}$, en este caso E es simétrico $\forall r$ y tenemos dos ctes. dieléctricas distintas

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = 1\cdot\vec{E} \quad ; \quad \vec{D}_2 = \epsilon\vec{E}$$

donde $\epsilon_1 = 1$, ya que es vacío.

$$\Rightarrow (3): \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} D_1(r)r^2\sin\theta' d\theta' d\phi' + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} D_2(r)\,r^2\sin\theta' d\theta' d\phi' = Q_\ell(r,t)$$

$$\Leftrightarrow E(r)\,2\pi r^2 + \frac{E(r)}{\epsilon}\,2\pi r^2 = Q_\ell(r,t) \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\epsilon}{\epsilon+1}\frac{Q_\ell(r,t)}{2\pi r^2}\,\hat{r}, \text{ para } a\le r<b$$

reemplazando esto en (2) $\Rightarrow \dfrac{\epsilon\sigma}{\epsilon+1} Q(r,t) = -\dot{Q}(r,t) \Leftrightarrow \dot{Q}(t) + \dfrac{\epsilon\sigma}{\epsilon+1}Q(t) = 0$

$$\Rightarrow Q(t) = c_1 e^{-\frac{\epsilon\sigma}{\epsilon+1}t}$$

imponiendo condición inicial $Q(t=0)=Q_0 \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\epsilon\sigma}{\epsilon+1}t}$

* Debido a que la esfera está rodeada de material dieléctrico, habrán cargas ligadas, superficiales y volumétricas, pero estas cargas no las consideramos porque están **rodeando** la esfera y nos preguntan por las cargas **en** la esfera

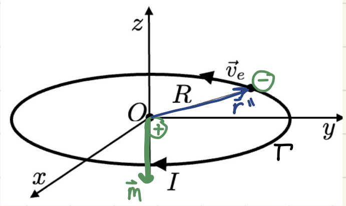
b) Para calcular la energía total disipada notamos que la esfera pierde toda su carga en $t\to\infty$, por lo que solo necesitamos calcular la energía inicial.

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}} E^2(\vec{r})d\tau = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} E^2(\vec{r})\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$= 2\pi\epsilon_0\left[\int_0^a \cancelto{0}{E^2(\vec{r})}r^2dr + \int_a^b E^2(\vec{r})\,r^2dr + \int_c^\infty \cancelto{0}{E^2(\vec{r})}r^2dr\right]$$

$$= 2\pi\epsilon_0\int_a^b \frac{\epsilon^2}{(\epsilon+1)^2}\frac{Q_0^2}{4\pi^2r^4}r^2dr = -\frac{\epsilon_0\epsilon^2}{(\epsilon+1)^2}\frac{Q_0^2}{2\pi}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

ⓐ



· $\vec{r}'' = R\hat{\rho}$

· $d\vec{r}'' = R\,d\theta\,\hat{\theta}$

curva que coincide con la línea de corriente.

Sabemos que el momento magnético está dado por $\vec{m} = \frac{I}{2}\oint_T \vec{r}'' \times d\vec{r}''$

curva cerrada

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}\cdot I \int_0^{2\pi} R\hat{\rho} \times R\,d\theta\,\hat{\theta} \qquad ; \ \hat{\rho}\times\hat{\theta} = \hat{k}$$

$$= \frac{1}{2} I R^2 \int_0^{2\pi} \hat{k}\,d\theta = \frac{1}{2} I R^2 \hat{k}\,[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot I R^2 \hat{k}\cdot 2\pi$$

Luego, notamos que la corriente está dada por la carga que se mueve en cada ciclo por lo que $I = \frac{-e}{T}$, con T el periodo.

Además, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ con ω la velocidad angular y $v_e = \omega\cdot R$

Por lo anterior, $\vec{m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-e}{T}\cdot R^2\hat{k}\cdot 2\pi$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-e}{\cancel{2\pi}}\cdot\omega\cdot R^2\hat{k}\cdot\cancel{2\pi}$$

$$\boxed{\vec{m} = -\frac{e}{2}\,v_e\cdot R\,\hat{k}} \qquad ; \ v_e = \omega\cdot R.$$

Obteniéndose lo pedido.//

ⓑ Notamos que la $\vec{F}$ de Lorentz a la que está sometida inicialmente es:

$\vec{F} = q\vec{E}$ ya que no hay campo magnético.

Así, $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{\rho}$; ya que $\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{\rho}$ y $q = -e$

$$\Rightarrow -m\,a_c\,\hat{\rho} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{\rho} \quad ; \text{pero} \quad a_c = \frac{v_e^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{m_e v_e^2}{\cancel{R}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R m_e}}}$$

Luego, al agregar un campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, la fuerza de Lorentz será:

$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$. , con $q = -e$.

En efecto, $-m_e\frac{v_f^2}{R}\hat{\rho} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{\rho} + -e\,v_f\,\hat{\theta}\times B\hat{z}$, con v_f la velocidad final

$$m_e\frac{v_f^2}{R}\hat{\rho} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{\rho} + e\,v_f\,B\,\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow m_e \frac{v_f^2}{R} - e v_f B = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad / \cdot \frac{R}{m_e}$$

$$\Longrightarrow v_f^2 - \frac{eBR}{m_e} v_f = \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e}}_{v_e^2}$$

$$\Rightarrow v_f^2 - v_e^2 = \frac{eBR}{m_e} v_f$$

$$\Rightarrow (v_f + v_e)(v_f - v_e) = \frac{eBR}{m_e} v_f \quad \Rightarrow \underbrace{(v_f - v_e)}_{} = \frac{eBR}{m_e} \frac{v_f}{v_f + v_e}$$

; como Δv_e es muy pequeña, $v_f \approx v_e$

$$\Rightarrow \Delta v_e = \frac{eBR}{m_e} \frac{\cancel{v_f}}{2\cancel{v_f}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v_e = \frac{eBR}{2m_e}}$$

Obteniéndose lo pedido//

ⓒ Utilizando la expresión obtenida en ⓐ, obtenemos:

$$\underbrace{\vec{m}_f - \vec{m}_e}_{\Delta \vec{m}} = -\frac{1}{2} e v_f R \hat{z} + \frac{1}{2} e v_e R \hat{z}$$

; ya que se tiene la misma carga con ≠ velocidad. Además se mantiene el radio R en ambos casos.

$$= -\frac{(v_f - v_e)}{2} e R \hat{z}$$

$$= -\Delta v_e \frac{eR}{2} \hat{z}$$

$$= -\frac{eRB}{2m_e} \cdot \frac{eR}{2} \hat{z} \quad ; \text{ por b).}$$

$$= -\frac{e^2 R^2 B\hat{z}}{4 m_e}$$

$B\hat{z} \to \vec{B}$ por enunciado.

$$\boxed{\Delta \vec{m} = -\frac{e^2 R^2 \vec{B}}{4 m_e}.}$$

Obteniéndose lo pedido//

ⓓ Podemos notar que se calculó $\Delta \vec{m}$ y nos entrega un resultado negativo. Esto nos dice que el momento magnético disminuye. Luego, notamos que estamos frente al caso en que al aplicar un campo, las cargas se alinean en sentido contrario por lo que el momento disminuye. Este, es justamente el caso de un material dieléctrico en el cual el cambio en $\vec{m}$ tiene dirección opuesta al campo $\vec{B}$.