Inducción electromagnética

Flujo magnético

$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ → B o S varían con el tiempo → **Fuerza electromotriz**

$= BS \cos\alpha$

$= \int \vec{B} \cdot \vec{dS}$

$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$ $[\varepsilon] = V$

→ **Corriente inducida**

$I = \frac{\varepsilon}{R}$ $[I] = A$

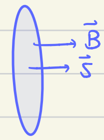
* Espira genera una fem que se opone a la variaø de flujo magnético.
  ↳ fem crea una corriente para oponerse a la $\Delta\phi$.

Ej

$B = B_0 \cos(\omega t)$ → campo oscila.

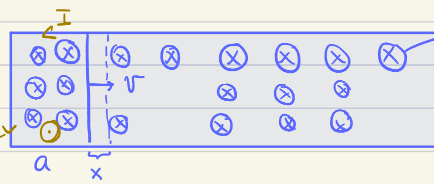
$\phi = BS \cos(\alpha) = BS = B_0 S \cos(\omega t)$.

↳ B y S forman un ángulo de 0°.



→ $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 S \omega \sin(\omega t)$

Ej Espira que tiene un brazo móvil.



$\vec{B} = B_0 \hat{k}$

$S = l(a+x)$ $v = \frac{x}{t}$

$S = l(a+vt)$.

→ $\phi = BS\cos(\alpha) = -B_0 l(a+vt)$.

$\alpha = 180°$ (campo entra y superficie sale)

La corriente I va en dirección positiva para oponerse a la variaø de flujo.

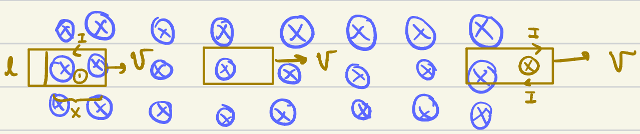
↓

Si $v = 0$ → I se hace 0.

$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 l v$.

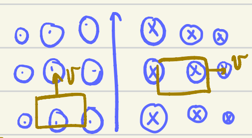
→ $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B_0 l v}{R}$

Ej



caso 1° 2° 3°

Ej común



$\varepsilon = 0$ — campo no varía aunque sea + intenso a un lado

$\varepsilon \neq 0$ — ya que siente cada vez un campo − intenso

⇒ $\Delta\phi$ ⇒ I para oponerse al ΔB

¿Cuál es la superficie atravesada por el campo?

1° $x = vt$

$S = lx = lvt$ → $\phi = BS\cos\alpha = Blvt\cos(\alpha) = -Blvt$.

$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = Blv$.

2° $\phi = BS = Bld$ → $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = 0$

3° $S = lvt$ → $\phi = Blvt$ → $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -Blv$

signo contrario xq espira quiere volver a la situaø en que estuvo antes.

Auxiliar 13

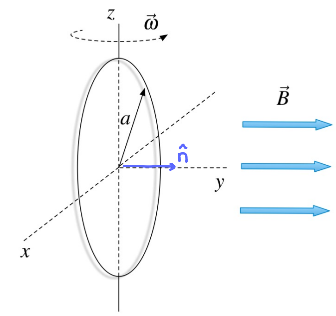
Problema 16.9

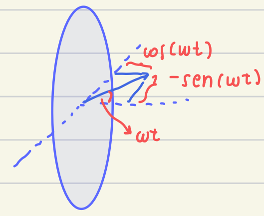
Considere inicialmente una espira circular de radio a que yace sobre el plano xz. En $t = 0$ la espira comienza a girar con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$. Si en el espacio existe un campo homogéneo y constante de valor $\vec{B} = B_0 \hat{y}$ determine:

a) La fem inducida en el circuito.

b) La corriente en función del tiempo que circula por la espira, si la espira posee una resistencia R y una autoinducción L.

c) El torque que siente la espira, suponiendo que ésta ha estado rotando un tiempo muy largo.





$\rightarrow \vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$

a) Se tiene que la fem está dada por. $\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$

Así, $\phi = \int d\vec{s}\cdot\vec{B} = \int ds\,\hat{n}\,\vec{B} = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho\, d\rho\, d\phi\ \hat{n}\cdot\vec{B}$; se tiene que $\left[\hat{n} = -sen(\omega_0 t)\hat{x} + cos(\omega_0 t)\hat{y}\right]$

└ en la dirección de la corriente!

$$= 2\pi\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\left(-\cancel{sen(\omega_0 t)\hat{x}}^{\,0} + cos(\omega_0 t)\hat{y}\right)\cdot B_0\hat{y}$$

$$\phi = \pi a^2 . cos(\omega_0 t) B_0$$

Luego, $\boxed{\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -(-\pi a^2 \omega_0 sen(\omega_0 t) B_0)}$

b) Se tiene que la fem = diferencia de potencial, por lo tanto,

$$V_{resist.} + \overbrace{V_{autoinducción}}^{*} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow IR + L\cdot\frac{\partial I}{\partial t} = \pi a^2 B_0 \omega_0 sen(\omega_0 t)$$

$*$ Se tiene la autoinduciancia: $L = \frac{\Phi_{propio}}{I}$

$\Rightarrow \varepsilon_{propia} = -\frac{d\Phi_{propio}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$

Se tiene la EDO:

$$\dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{\pi a^2 B_0 \omega_0 sen(\omega_0 t)}{L} \quad /\cdot e^{\frac{R}{L}t}$$ (usando factor integrante)

$$\Rightarrow \dot{I}e^{\frac{Rt}{L}} + \frac{R}{L}Ie^{\frac{R}{L}t} = \frac{\pi a^2}{L} B_0 \omega_0 sen(\omega_0 t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I(t)\cdot e^{\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{\pi a^2}{L} B_0 \omega_0 sen(\omega_0 t)\cdot e^{\frac{R}{L}t} \quad / \int_0^t$$

$$\Rightarrow I(t)e^{\frac{Rt}{L}} - I(0) = \frac{\pi a^2}{L} B_0 \omega_0 \cdot \left[\frac{-L e^{Rt/L}\left[L\omega_0 cos(\omega_0 t) - R sen(\omega_0 t)\right]}{L^2\omega^2 + R^2}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow I(t)e^{\frac{Rt}{L}} - I(\cancel{0})_{0} = \frac{\pi a^2 B_0 \omega_0}{\cancel{L}}\left(\frac{-\cancel{L} e^{Rt/L}\left[L\omega_0 cos\,\omega_0 t - R sen\,\omega_0 t\right]}{L^2\omega^2 + R^2} + \frac{L^{\cancel{2}}\omega_0}{L^2\omega^2+R^2}\right)$$

No hay corriente en t = 0 ya que no hay un cambio el flujo.

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{\pi a^2 B_0 \omega_0}{L^2\omega_0^2 + R^2}\left(-L\omega_0(cos\,\omega_0 t - e^{-Rt/L}) + R sen\,\omega_0 t\right)}$$ //

ⓒ Si ha rotado un tiempo muy largo, $e^{-\frac{Rt}{L}} \longrightarrow 0$.
Así, la corriente será:

$$I(t) = \frac{\pi a^2 B_0 \omega_0}{L^2\omega_0^2 + R^2}\left(R\,\text{sen}(\omega_0 t) - L\omega_0 \cos(\omega_0 t)\right)$$

El torque magnético sobre un circuito cerrado Γ está dado por:

$$\tau = \oint_\Gamma \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\longrightarrow \vec{m} = \oint \vec{r}\,' \times I d\vec{l} = IA\,\hat{n} = \underline{\underline{I}}\,\pi a^2 \cdot (-\text{sen}(\omega_0 t)\hat{x} + \cos(\omega_0 t)\hat{y})$$

$$= \frac{\pi^2 a^4 B_0 \omega_0}{L^2\omega_0^2 + R^2}\left(R\,\text{sen}(\omega_0 t) - L\omega_0 \cos(\omega_0 t)\right)(-\text{sen}(\omega_0 t)\hat{x} + \cos(\omega_0 t)\hat{y})$$

$$\vec{\tau} = \frac{\pi^2 a^4 B_0 \omega_0}{L^2\omega_0^2 + R^2}\left(R\,\text{sen}(\omega_0 t) - L\omega_0 \cos(\omega_0 t)\right)(-\text{sen}(\omega_0 t)\hat{x} + \cancelto{0}{\cos(\omega_0 t)\hat{y}}) \times B_0\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = -\frac{\pi^2 a^4 B_0^2 \omega_0}{L^2\omega_0^2 + R^2}\left(R\,\text{sen}(\omega_0 t) - L\omega_0 \cos(\omega_0 t)\right)\text{sen}(\omega_0 t)\,\hat{z}}$$

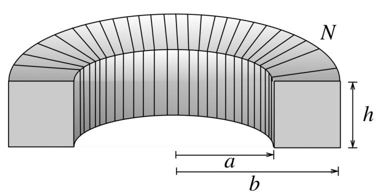
Problema 16.8

Considere toroide de sección transversal rectangular de N vueltas, de radio interior a y exterior b, y altura h.

a) Determine la autoinductancia de este toroide.

b) Demuestre que si $b - a \ll a$ entonces la autoinductancia del toroide puede ser aproximada como

$$L = \cancel{\frac{\mu_0 N^2 h(b-a)}{2\pi a}} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



ⓐ Se tiene que la autoinductancia está dada por: $L = \frac{\Phi_{prop}}{I}$

luego, $\phi = \vec{B}\cdot\vec{S}$.

Usando ley de Ampère $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = I_{enc}\cdot\mu_0$, en un loop que atraviesa al toroide, es decir, con un radio $a < r < b$:

$$\Rightarrow \vec{B}(a<r<b)\cdot 2\pi r = I\cdot N\mu_0$$

$$\Rightarrow \vec{B}(a<r<b) = \frac{IN\mu_0}{2\pi r} \longrightarrow \text{campo magnético dentro del toroide.}$$

El flujo que pasa por cada sección transversal rectangular, será:

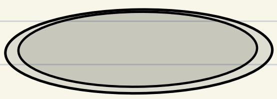
$$\phi_{sección} = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{I N \mu_0}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot (b-a) h \hat{\phi}$$

Luego, el flujo total será el que pase por las N espiras:

$$\phi_{propio} = N \cdot \phi_{sección} = \frac{I N^2 \mu_0}{2\pi r} (b-a) h.$$

Y por último, $\boxed{L = \frac{\phi_{propio}}{I} = \frac{N^2 \mu_0}{2\pi r} (b-a) h}$

(b) Notamos que si $b-a \ll a$, el toroide será del estilo:



con lo que podemos aproximar el campo del toroide como constante e igual a evaluarlo en a.

Así $L = \frac{N^2 \mu_0 h}{2\pi} \frac{(b-a)}{a}$

* si x es pequeño, $x+1 \approx e^x$

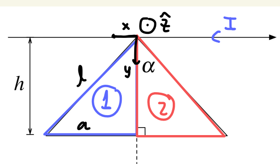
Luego, $\frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1$. Se tiene además, que si $x \ll 1$, $\ln(x+1) \approx x$

$\Rightarrow$ como $b-a \ll a \Rightarrow \frac{b-a}{a} \ll 1 \Rightarrow \frac{b-a}{a} \approx \ln\left(\frac{b-a}{a} + 1\right) = \ln\left(\frac{b}{a} - 1 + 1\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

$\therefore \; L = \frac{N^2 \mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ //

Problema 16.1

Encuentre el coeficiente de inductancia mutua entre un alambre infinitamente largo y un triángulo isósceles de altura h dispuestos como se muestra en la Figura.



Coeficiente de Inductancia Mutua:

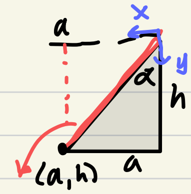
$$M = \frac{\phi_{1\to 2}}{I_1} = \frac{\phi_{2\to 1}}{I_2} \; ; \quad \text{con } \phi_{1\to 2} \text{ el flujo del circuito 1 sobre el 2.}$$

Por simetría el flujo que pase por (1) será igual al que pase por (2).

Así $M = \frac{\phi_{alambre \to \Delta}}{I_{alam.}}$. Luego, para un alambre infinito se tiene que $\vec{B}_{alam.} = \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi y} \hat{z}$

· $h = l \cos\alpha \Rightarrow \frac{h}{\cos\alpha} = l$

$a = l \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow a = \frac{h \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = h \tan\alpha$



$y = \frac{h}{a} x$

$$\phi_{alam.\to ①} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^a \int_{\frac{hx}{a}}^{h} \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi\, y} \cdot dy\, dx$$

$$\Longrightarrow \phi_{alam \to ①} = \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi} \int_0^a \left[\ln y\right]_{\frac{hx}{a}}^{h} dx$$

$$\Rightarrow \phi_{alam \to ①} = \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi} \int_0^a \ln\left(\frac{ha}{hx}\right) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi} \int_0^a \ln\left(\frac{a}{x}\right) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi} \left[x \log\left(\frac{a}{x}\right) + x \right]_0^a$$

$$= \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi} \left(a \cdot \cancel{\ln(1)}^{\,0} + a - 0 \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_{alam}}{2\pi} . a = \frac{\mu_0 I_{alam} . h \tan\alpha}{2\pi}$$

Luego $2\,\phi_{alam \to ①} = \phi_{alam \to ①} + \phi_{alam \to ②} = \phi_{alam. \to \Delta}$

$$\Rightarrow \phi_{alam \to \Delta} = \frac{\mu_0 I_{alam} . h \tan\alpha}{\pi} \cancel{\frac{2}{2}}$$

$$\therefore\ M = \frac{\phi_{alam \to \Delta}}{I_{alam}} = \frac{\mu_0 h \tan\alpha}{\pi} \ //$$

* Por convención se asume que el flujo magnético se genera en un elemento y se acopla al segundo elemento. Esto se basa en la dirección de la corriente y el sentido del flujo del 1° elemento. Por lo tanto si la corriente va en $\hat{x}$ en el alambre, tendrá el mismo sentido en el triángulo y por tanto $\vec{B}$ y $d\vec{s}$ irán en $\hat{z}$.