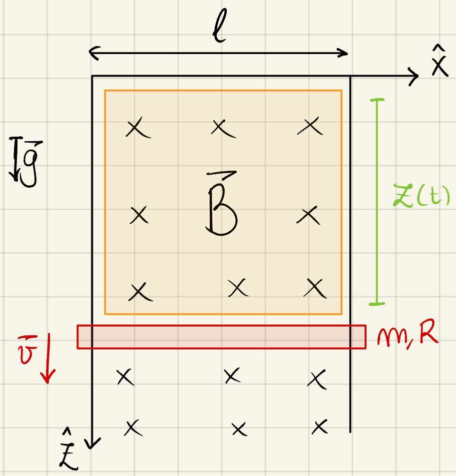
Auxiliar 12

P1



Tenemos que en la sección naranja el flujo de campo magnético que la atraviesa cambia con el tiempo, ya que esta sección crece a medida que la barra roja cae por la gravedad. Por lo tanto

$$\frac{d\phi}{dt} \neq 0$$

con ϕ el flujo de campo magnético que atraviesa la zona naranja, así que habrá una fem inducida

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

Este flujo se calcula como $\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$, donde $\vec{B} = -B\hat{y}$ y $d\vec{a} = dx\,dz\,\hat{y}$ con $x \in [0, \ell]$ y $z \in [0, z(t)]$

$$\Rightarrow \phi(t) = \int_0^z\int_0^\ell -B\hat{y}\cdot dx\,dz\,\hat{y} = -B\ell z(t)$$

$$\therefore \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B\ell\dot{z}(t) \equiv B\ell v(t)$$

Ahora, esta fem inducirá una corriente a través del circuito que forma la sección naranja, como la barra roja tiene resistencia,

$$V = \varepsilon(t) = R\cdot I(t) \Leftrightarrow I(t) = \frac{B\ell}{R}v(t)$$

donde $I(t)$ sería la corriente que circula por la barra roja. También sabemos por fuerza de Lorentz que si un circuito por el que circula corriente está en presencia de un cpo. magnético externo, este generará una fuerza sobre el circuito

$$\vec{F}_{mag} = \int I(t)\, d\vec{l} \times \vec{B}, \quad \text{donde } d\vec{l} = dx\,\hat{x} \text{ y } \vec{B} = -B\hat{y}$$

$$= I(t)\int_0^\ell dx\,\hat{x} \times -B\hat{y} = -I(t)B\ell\hat{k}$$

Además de esta fuerza magnética tenemos la fuerza peso $\vec{F}_P = +mg\hat{k}$, entonces por segunda Ley de Newton

$$m\ddot{z} = -I(t)B\ell + mg, \quad \text{donde } \ddot{z} = \frac{d}{dt}\dot{z} = \frac{d}{dt}v(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}v(t) = -\frac{(B\ell)^2}{mR}v(t) + g$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{-\alpha v + g} = dt \qquad , \text{ con } \alpha \equiv \frac{(Bl)^2}{mR}$$

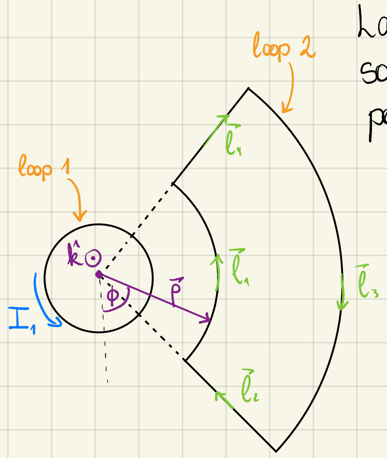
$$\Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{-\alpha v + g} = \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-\alpha} \cdot \ln(-\alpha v + g) \Big|_0^{v(t)} = t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(-\frac{\alpha v(t)}{g} + 1 \right) = -\alpha t$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{g}{\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right)$$

P2



La inductancia que producirá un loop 1 sobre un loop 2, es la misma que induce el loop 2 sobre el loop 1, así que tenemos libertad en cuál cpo. magnético calculamos (producido por uno de los loops) y calcularíamos el flujo sobre el otro loop.

Calcularemos el flujo de campo magnético (producido por 1) que atraviesa a 2. Nombremos el cpo. producido por 1 como $\vec{B}_1$, tenemos la relación

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_1(\vec{r})$$

entonces cuando calculamos el flujo magnético que atraviesa a 2 podemos usar Stokes

$$\Phi_2 = \oint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}\,') \cdot d\vec{a}\,' = \oint_{S_2} (\nabla' \times \vec{A}_1(\vec{r}\,')) \cdot d\vec{a}\,' = \int_{C_2} \vec{A}_1(\vec{r}\,') \cdot d\vec{\ell}\,' \quad (1)$$

donde S_2 es la superficie que encierra 2 y C_2 el contorno de esa superficie. Notamos que por (1) solo necesitamos el vector potencial generado por 1, que si consideramos $a \ll 1$ (o que 2 está muy lejos, $\ell \gg a$) está dado por la expresión de un dipolo

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

donde elegimos el origen de nuestro sistema en el centro de 1. El momento dipolar está dado por $\vec{m} = I_1 \pi a^2 \hat{k}$, asumiendo una corriente I_1 que después se cancelará, entonces ocupando cilíndricas con $z=0$ (ambos loops están en el mismo plano)

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \pi a^2 \hat{k} \times \rho\hat{\rho}}{\rho^3} = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{4} \frac{1}{\rho^2} \hat{\phi}$$

así que el flujo estaría dado por $\displaystyle \Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{4} \int_{C_2} \frac{1}{\rho'^2} \hat{\phi}' \cdot d\vec{\ell}\,' = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{4} \sum_{i=1}^{4} \int_{\ell_i} \frac{1}{\rho'^2} \hat{\phi}' \cdot d\vec{\ell}\,'_i$

que calculamos en 4 partes (vean las direcciones de los $\vec{\ell}_i$ del dibujo)

▷ $\vec{\ell}_1$: $\displaystyle \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\ell^2} \hat{\phi}' \cdot \ell \, d\phi' \hat{\phi}' = \frac{1}{\ell} \int_0^{\theta_0} d\phi' = \frac{\theta_0}{\ell}$

▷ $\vec{\ell}_2 \wedge \vec{\ell}_4$: $\displaystyle \pm \int_{\ell}^{\ell+h} \frac{1}{\rho'^2} \underbrace{\hat{\phi}' \cdot d\rho' \hat{\rho}'}_{=0} = 0$

▷ $\vec{\ell}_3$: $\displaystyle \int_{\theta_0}^{0} \frac{1}{(\ell+h)^2} \hat{\phi}' \cdot (\ell+h) \, d\phi' \hat{\phi}' = \frac{-\theta_0}{\ell+h}$

$$\therefore \phi_2 = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{4}\left[\frac{\theta_0}{l} - \frac{\theta_0}{l+h}\right] = \frac{\mu_0 a^2 \theta_0}{4}\, \frac{h}{l}\, \frac{1}{(l+h)} \cdot I_1 > 0$$

Y como la inductancia mutua $M_{21} = M_{12}$ se calcula como $\phi_2 = M_{21} \cdot I_1$

$$\Rightarrow M_{21} = M_{12} = M = \frac{\mu_0 a^2 \theta_0}{4}\, \frac{h}{l}\, \frac{1}{(l+h)}$$