

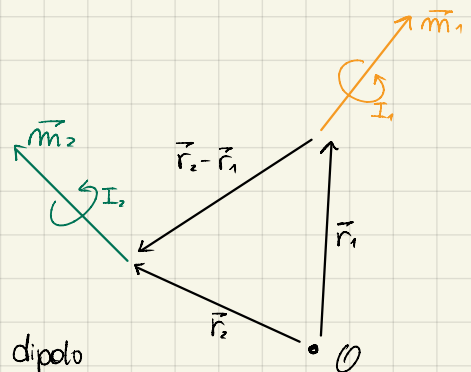
Auxiliar 10

P1

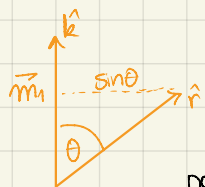
El potencial vector de los dipolos sería:

$$\triangleright \vec{A}_{dip,1}(\vec{r}-\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \times (\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$

$$\triangleright \vec{A}_{dip,2}(\vec{r}-\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_2 \times (\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$$



Calculemos el campo magnético producido por un dipolo. Consideremos que el dipolo está alineado con el eje $\hat{k}$ de cartesianas, por lo que el producto cruz sería de la forma



$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta \hat{\phi}}{r^2}$$

por lo que el vector potencial es de la forma $\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \end{pmatrix}$, así que en el rotor en esféricas solo nos sobreviven los términos

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \hat{\theta}$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin^2 \theta}{r^2} \right) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r} \right) \hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3} \cos \theta \hat{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \hat{\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (2m \cos \theta \hat{r} + m \sin \theta \hat{\theta})$$

Pero queremos una expresión más general! Notemos que

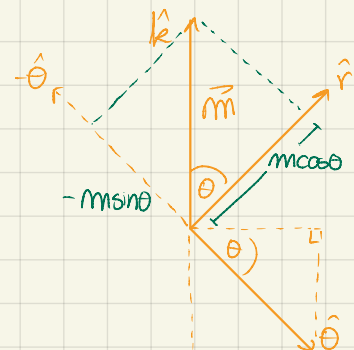
$$\vec{m} = (\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} + (\vec{m} \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta} = m \cos \theta \hat{r} - m \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\Leftrightarrow -\vec{m} = -m \cos \theta \hat{r} + m \sin \theta \hat{\theta}$$

y si le sumamos $3m \cos \theta \hat{r} = 3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r}$

$$\Rightarrow 3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m} = 2m \cos \theta \hat{r} + m \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\therefore \vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m})$$



este $\vec{r}$ es el vector desde el dipolo a la posición deseada

Con nuestra expresión de $\vec{B}_{dip}$ válido para cualquier orientación de $\vec{m}$, calculemos el campo producido por el dipolo (magnético) $\vec{m}_1$ en $\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{B}_{\vec{m}_1}(\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \left[3 \left(\vec{m}_1 \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - \vec{m}_1 \right]$$

Y como el torque sobre un dipolo se calcula como $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \vec{m}_2 \times \left[3 \left(\vec{m}_1 \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - \vec{m}_1 \right]$$

Supongamos que $\vec{r}_1 = L\hat{i}$, $\vec{r}_2 = L\hat{j}$ y $\vec{m}_1 = m_1\hat{i}$ y $\vec{m}_2 = m_2\hat{j}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|L\hat{j} - L\hat{i}|^3} m_2\hat{j} \times \left[3 \left(m_1\hat{i} \cdot \frac{(L\hat{j} - L\hat{i})}{|L\hat{j} - L\hat{i}|} \right) \cdot \frac{(L\hat{j} - L\hat{i})}{|L\hat{j} - L\hat{i}|} - m_1\hat{i} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{L^3 2^{3/2}} \left[\frac{-3m_1L}{L^6 2^3} \cdot m_2\hat{k} + m_2m_1\hat{k} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{L^3 2^{3/2}} m_1m_2 \left[1 - \frac{3}{L^5 2^3} \right] \hat{k}$$

P2

En presencia de magnetización, se inducen corrientes dadas por

$$\vec{J}_b(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}); \quad \vec{K}_b(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

En nuestro caso $\vec{M}$ es constante $\forall r \leq R \Rightarrow \vec{J}_b(\vec{r}) = \vec{0}$ y la normal a la superficie está dada por $\hat{n} = \hat{r}$, si elegimos un sist. de coordenadas esférico y con $\hat{k}$ alineado con $\vec{M}$, tendríamos

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M \hat{k} \times \hat{r} = M \sin \theta \hat{\phi} \stackrel{!}{=} \sigma \vec{v} \quad \text{por dep. de densidad superficial}$$

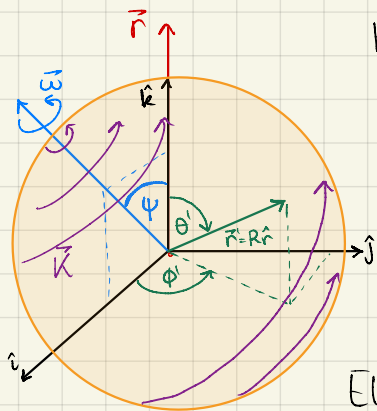
Notemos que esta corriente inducida es igual a la corriente de una esfera con una densidad superficial de carga σ que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$, en este caso

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} = \sigma \omega \hat{k} \times R \hat{r} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}$$

así que podemos calcular el campo magnético de esta esfera rotatoria y luego hacer

$$\sigma R \omega = M$$

Calcularemos primero el $\vec{A}(\vec{r})$ y luego $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}$. Debido a que tenemos vectores expresados en distintos sist. debemos ceñirnos con uno, para simplificar la matroaca el giremos un sist. cartesiano donde el $\vec{r}$ de un sist. de coordenadas esféricas, calze con $\hat{k}$. Debido a que no nos interesa solo el caso en que $\vec{r}$ apunta en la misma dirección de $\vec{\omega}$, esta dirección de giro estará ladeada por un ángulo Ψ y contenida enteramente en el plano $x-z$



Habendo elegido el sist. como en la figura, donde $\vec{r}$ es donde queremos saber el campo magnético y $\vec{r}'$ es el vector que nos va indicando dónde ir integrando, tendríamos

- ▷ $\vec{r} = r \hat{k} \quad (1)$
- ▷ $\vec{\omega} = \omega \cos \Psi \hat{k} + \omega \sin \Psi \hat{i} \quad (2)$
- ▷ $\vec{r}' = R \hat{r}' = R (\sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + \cos \theta' \hat{k}) \quad (3)$

El problema es que como muestra la corriente $\vec{K}$ (morado) esta tendría componentes en todos los ejes ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$). Por mecánica recordamos que la velocidad en un punto $\vec{r}'$ dada una rotación ω

$$\vec{\omega} \times \vec{r}', \text{ usando (2) y (3)}$$

que una rotación $\vec{\omega}$ en una posi-

$$= \omega (\cos \Psi \hat{k} + \sin \Psi \hat{i}) \times R (\sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + \cos \theta' \hat{k})$$

$$= \omega R (-\cos \Psi \sin \theta' \sin \phi' \hat{i} + (\cos \Psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \Psi \cos \theta') \hat{j} + \sin \Psi \sin \theta' \sin \phi' \hat{k}) \quad (4)$$

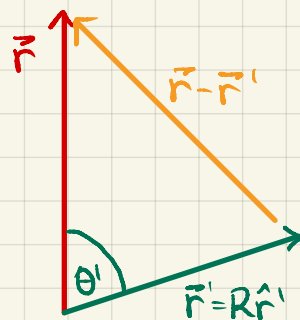
Así que la corriente en nuestro sist. elegido sería $\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}'$ con (4)

Ya tenemos la corriente expresada, sabemos que el diferencial de área de la esfera es

$$da' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

así que faltaría expresar $|\vec{r} - \vec{r}'|$. Por dibujo de la derecha vemos que podemos expresar esta magnitud con teorema del coseno

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}$$



Ya tenemos todo, calculemos el vector potencial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sigma \omega R (-\cos\psi \sin\theta' \sin\phi' \hat{i} + (\cos\psi \sin\theta' \cos\phi' - \sin\psi \cos\theta') \hat{j} + \sin\psi \sin\theta' \sin\phi' \hat{k}) R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta')^{3/2}}$$

notamos que se nos van todos los términos con $\sin\phi'$ y $\cos\phi'$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \omega R^3 \int_0^\pi \frac{-\sin\psi \cos\theta' \sin\theta' d\theta' d\phi'}{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta')^{3/2}} \hat{j} = -\frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R^3 \int_0^\pi \frac{\sin\theta' \cos\theta' d\theta'}{(R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta')^{3/2}} \hat{j} \\ &= \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R^3 \frac{1}{3R^2 r^2} [(R^2 + r^2 + Rr)|R-r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R+r)] \hat{j} \end{aligned}$$

Notamos en el resultado que hay una diferencia según si $R > r$ o $R < r$, así que $\vec{A}$ sería

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\mu_0 R \sigma \omega r \sin\psi \hat{j} / 3 & , r < R \\ -\mu_0 R^4 \sigma \omega \sin\psi \hat{j} / 3r^2 & , R < r \end{cases}$$

Notamos por dibujo que $\vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega \sin\psi r \hat{j}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 R \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} / 3 & , r < R \\ \mu_0 R^4 \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} / 3r^3 & , R < r \end{cases}$$

Recordemos el sistema que definimos en un inicio (con $\vec{\omega}$ en $\hat{k}$), ahí tendríamos $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \sin\theta \hat{\phi}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 R \sigma \omega r \sin\theta \hat{\phi} / 3 & , r < R \\ \mu_0 R^4 \sigma \omega \sin\theta \hat{\phi} / 3r^2 & , R < r \end{cases}$$

en este sistema, $\vec{A}(\vec{r})$ sería de la forma $\vec{A} = (0, 0, A_\phi)$, así que el rotor ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) sería de la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \hat{\theta} \dots \text{háganlo ustedes}$$