Auxiliar 10

Magnetoestática y magnetización

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

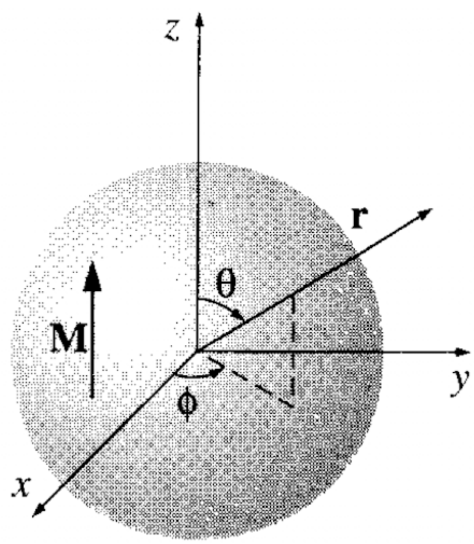
P1.- Magnetoestática

Dos dipolos magnéticos $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ se encuentran en las posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ respectivamente. Calcule el campo magnético producido por $\mathbf{m}_1$ en el lugar en que se encuentra el segundo dipolo. Exprese de forma general (para cualquier expresión de los dipolos y las posiciones) el torque entre ellos, luego evalúe para el caso

$$\mathbf{m}_1 = m_1\hat{\mathbf{i}}\,, \quad \mathbf{m}_2 = m_2\hat{\mathbf{j}}\,, \quad \mathbf{r}_1 = L\hat{\mathbf{i}}\,, \quad \mathbf{r}_2 = L\hat{\mathbf{j}}\,.$$

P2.- Magnetización

Considere una esfera de radio R magnetizada uniformemente con una magnetización $\mathbf{M}$. Calcule el campo magnético producido por esta esfera, tanto dentro como fuera de ella.



Formulario

Vector potencial

La expansión multipolar del vector potencial $\mathbf{A}$ está dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\oint \mathrm{d}\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta'\,\mathrm{d}\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3}\oint (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\mathbf{l}' + \dots\right],$$

de aquí vemos que la contribución dipolar es

$$\mathbf{A}_{\mathrm{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

donde $\mathbf{m}$ es el vector dipolo magnético y $\mathbf{r}$ es el vector distancia al origen.
Recordar que la relación del vector potencial con el campo magnético es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Magnetización

Un objeto con una magnetización $\mathbf{M}$ adquiere corrientes ligadas (*bound currents*) dadas por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}[\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')]\,\mathrm{d}\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}[\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\mathrm{d}\mathbf{a}']$$
$$\Rightarrow \mathbf{J}_b \equiv \nabla\times\mathbf{M}\,; \quad \mathbf{K}_b \equiv \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}\,,$$

donde $\mathbf{J}_b$ sería la corriente ligada volumétrica, $\mathbf{K}_b$ superficial y $\hat{\mathbf{n}}$ el vector normal al área $\mathbf{a}'$.

Coordenadas esféricas

El diferencial de área es:

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\hat{r} + r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\hat{\theta} + r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\hat{\phi}\,,$$

y el rotor de una función $\mathbf{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\phi\hat{\phi}$ es

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}\,.$$