Auxiliar 9

Ley de Biot - Savart

- $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$
- $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')\, ds}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$
- $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')\, dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

- $\vec{r}$: lugar donde se desea conocer el campo
- $\vec{r}'$: " " " encuentra la corriente.

$\rightarrow \vec{K}(\vec{r}) = \sigma \vec{v}$

$\rightarrow \vec{J}(\vec{r}) = \rho \vec{v}$

μ_0 : permeabilidad magnética

→ capacidad que tienen los condutores de afectar y ser afectados por los campos magnéticos.

* Tip: escoger $d\vec{l}$ positivo y definir el sentido de la corriente con los límites de la integral.

Medios conductores

→ pasos comunes:

- Notar que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$
- calcular $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$
- Obtener $\vec{J} = g\vec{E}$
- calcular $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s}$
- Reconocer $V = IR$

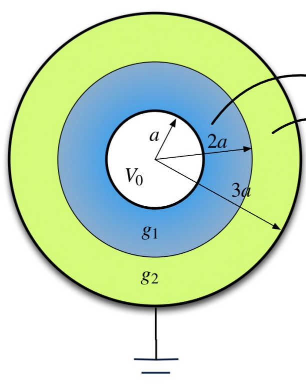
P2

Problema 8.3

Considere dos esferas conductoras concéntricas de radios a y $3a$. La región entre $a < r < 2a$ es llenada con un material de conductividad g_1 y la región entre $2a < r < 3a$ tiene material de conductividad g_2. Asuma que ambos materiales tienen una permitividad igual a ε_0. La esfera interior se encuentra a un potencial $V = V_0$ y la exterior $V = 0$. Determine

a) La resistencia del sistema.

b) La densidad superficial de carga en $r = 2a$.



E_1

E_2

desconocidos.

$V = -\int_{\infty}^{3a} E = 0$

a) Asumiendo un estado estacionario:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 J_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{C}{r^2}\hat{r}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_1 = g_1 \vec{E}_1 \Rightarrow \boxed{\frac{C}{g_1 r^2}\hat{r} = \vec{E}_1}$$, con C cte.

- Por simetrías del problema, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

- se tiene $\Delta V = V_0 - 0 = V_0$ conocido.

luego,

$$V_0 = -\int_{2a}^{a} \vec{E}(a<r<2a)\,d\vec{r} - \int_{3a}^{2a} \vec{E}(2a<r<3a)\,d\vec{r}$$

- Luego, $\vec{J}_1 = g_1 \vec{E}_1$ y $\vec{J}_2 = g_2 \vec{E}_2$

- Por condiciones de borde: $J_{1n} = J_{2n}$

Tomando en cuenta que $\vec{J}_1 = J_1(r)\hat{r}$ y $\vec{J}_2 = J_2(r)\hat{r}$, $\Rightarrow \vec{J}_1 = \vec{J}_2$

$\Rightarrow \boxed{g_1 \vec{E}_1 = g_2 \vec{E}_2}$

$\Rightarrow \vec{E}_1 = \dfrac{g_2 \vec{E}_2}{g_1}$

Así,

$$\Rightarrow V_0 = -\int_{2a}^{a} E_1\,dr - \int_{3a}^{2a} \frac{g_1 E_1}{g_2}\,dr$$

$$\Rightarrow V_0 = -\int_{2a}^{a} E_1\,dr - \frac{g_1}{g_2}\int_{3a}^{2a} E_1\,dr$$

Luego, $V_0 = -\displaystyle\int_{2a}^{a} \frac{C}{g_1 r^2}\,dr - \frac{g_1}{g_2}\int_{3a}^{2a} \frac{C}{g_1 r^2}\,dr$

$$= -\frac{C}{g_1}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2a}^{a} - \frac{C}{g_2}\left[-\frac{1}{r}\right]_{3a}^{2a}$$

$$V_0 = -\frac{C}{g_1}\left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{a}\right] - \frac{C}{g_2}\left[\frac{1}{3a} - \frac{1}{2a}\right]$$

$$V_0 = -\frac{C}{g_1}\left[\frac{1-2}{2a}\right] - \frac{C}{g_2}\left[\frac{2-3}{6a}\right] = -\frac{C}{g_1}\left[\frac{-1}{2a}\right] - \frac{C}{g_2}\left[\frac{-1}{6a}\right] = \frac{3Cg_2}{6g_1g_2a} + \frac{Cg_1}{6g_1g_2a} = \frac{(3g_2+g_1)C}{6g_1g_2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_0 \cdot 6g_1g_2a}{(3g_2+g_1)} = C}$$

$$\therefore \vec{J} = \frac{V_0 \cdot 6g_1g_2a}{(3g_2+g_1)r^2}$$

$\rightarrow$ obtenemos $I = \displaystyle\int \vec{J}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{V_0 \cdot 6g_1g_2a\cancel{r^2}}{(3g_2+g_1)\cancel{r^2}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$

$$I = \frac{a\,V_0 \cdot 6\,g_1g_2}{(3g_2+g_1)} \cdot 4\pi = \frac{24\pi V_0 g_1 g_2 a}{3g_2+g_1}$$

Por último: $V_0 = I \cdot R$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{I} = R \qquad \Rightarrow \frac{\cancel{V_0}(3g_2+g_1)}{24\pi \cancel{V_0} g_1 g_2 a} = R$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3g_2+g_1}{24\pi g_1 g_2 a} = R}$$

b) Utilizando las condiciones de borde en la componente normal:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{2n} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = \frac{6V_0 g_2 a}{(3g_2 + g_2) r^2} \hat{r} \rightarrow E_{1n}(2a) = \frac{6V_0 g_2 a}{(3g_2+g_1)4a^2}$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{6V_0 g_1}{(3g_2+g_1)4a} - \varepsilon_0 \frac{6V_0 g_2}{(3g_2+g_1)4a} \qquad \vec{E}_2 = \frac{6V_0 g_1 a}{(3g_2+g_1) r^2} \hat{r} \rightarrow E_{2n}(2a) = \frac{6V_0 g_1 a}{(3g_2+g_1) \cdot 4a^2}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{3\varepsilon_0 V_0 (g_1 - g_2)}{(3g_2+g_1)\, 2a}} \;//$$

Problema 3

Considere que una partícula de carga q y masa m se mueve sobre el eje x a una velocidad v. En $x = 0$ la partícula entra a una zona de campo magnético uniforme $\vec{B}$ que entra al plano, tal como se ve en la figura 3. La partícula deja la zona con campo a una distancia d para luego pegar en una pantalla que se encuentra a una distancia d_1. Calcule la altura a la que la partícula pega en la pantalla.

Solución

El problema se divide en 2 zonas, la zona-I en la cual hay campo magnético y zona-II donde no hay campo magnético. En la zona-II el movimiento de la partícula va a ser una recta ya que no actúan fuerzas sobre ella, luego se tiene que la posición va a ser:

$$x_2(t) = \tilde{x}_0 + \tilde{v}_x(t - T) \tag{20}$$

$$y_2(t) = \tilde{y}_0 + \tilde{v}_y(t - T) \tag{21}$$

donde T es el tiempo en que la partícula deja la zona con campo, $\tilde{x}_0$ e $\tilde{y}_0$ son la posición inicial en x e y respectivamente, y por último $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y$ son las velocidades iniciales en x e y respectivamente.

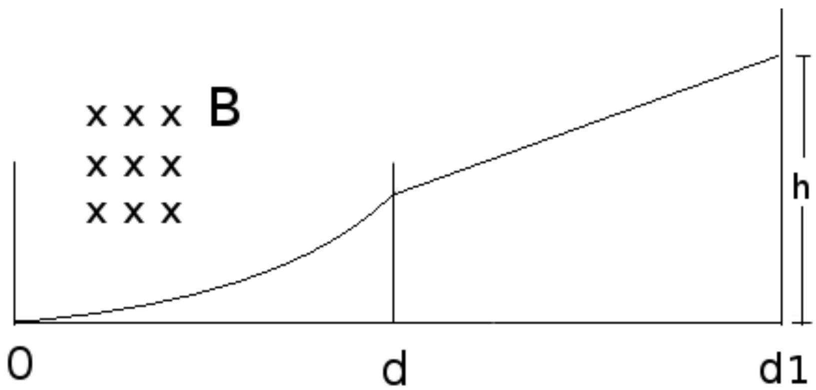


Figura 3:

Supongamos que en T_2 la partícula pega en la pantalla, entonces se va a tener que:

$$d_1 = x_2(T_2) = \tilde{x}_0 + \tilde{v}_x(T_2 - T) \tag{22}$$
$$h = y_2(T_2) = \tilde{y}_0 + \tilde{v}_y(T_2 - T) \tag{23}$$

Se puede despejar $(T_2 - T)$ de (22) y reemplazar en (23), donde se encuentra que:

$$h = \tilde{y}_0 + \frac{\tilde{v}_y}{\tilde{v}_x}(d_1 - \tilde{x}_0) \tag{24}$$

Para encontrar $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{v}_x, \tilde{v}_y$ hay que resolver Newton en la Zona-I, donde por continuidad del moviemiento se debe tener que la posición y velocidad final en la zona-I debe ser igual a la posición y velocidad inicial en la zona-II.

Para encontrar la posición de la partícula en la zona-I, nos damos cuenta que sobre esta solo actúa la fuerza debida al campo magnético, por lo tanto se tiene que:

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{25}$$

En este caso el eje x va hacia la derecha, el eje y hacia arriba y el eje z sale de la hoja, considerando esto el campo magnético es $\vec{B} = -B\hat{z}$. Con esto las ecuaciones de movimiento son:

$$m\dot{v}_x = -qv_yB \tag{26}$$
$$m\dot{v}_y = qv_x B \tag{27}$$
$$m\dot{v}_z = 0 \tag{28}$$

Claramente $z(t) = 0$. Las ecuaciones (26) y (27) se resuelven de forma análoga al problema 2, se deriva (26), luego se despeja $\dot{v}_y$ y se reemplaza en (27). Esto da que la ecuación para $\dot{v}_x$ es:

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \qquad \text{con} \qquad \omega^2 = \frac{q^2B^2}{m^2} \tag{29}$$

Que es la ecuación de un oscilador armónico, cuya solución al igual que en el problema 2 es:

$$v_x = H\cos(\omega t) + G\sin(\omega t) \tag{30}$$

Las condiciones iniciales en este caso van a ser:

1. $v_x(t = 0) = v$. Porque la partícula se venía moviendo con velocidad v en el eje x.
2. $\dot{v}_x(t = 0) = 0$. Porque inicialmente la partícula no se mueve en y. Sale de (26).

Si se aplican las condiciones iniciales se encuentra v_x. Una vez que se conoce v_x se despeja v_y de (26), con lo que se obtiene:

$$v_x = v\cos(\omega t) \tag{31}$$

$$v_y = v\sin(\omega t) \tag{32}$$

Para encontrar las posiciones se integran v_x y v_y con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 0$, lo que da:

$$x_1(t) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega t) \tag{33}$$

$$y_1(t) = \frac{v}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) \tag{34}$$

Ahora si podemos determinar $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{v}_x, \tilde{v}_y$. Es claro que $\tilde{x}_0 = d$, ya que ahí se termina la zona con campo magnético. Ahora $\tilde{y}_0$ se puede determinar como:

$$\tilde{y}_0 = y_1(T) = \frac{v}{\omega}(1 - \cos(\omega T)) \tag{35}$$

Para encontrar $\cos(\omega T)$ usamos que:

$$d = x_1(T) = \frac{v}{\omega}\sin(\omega T) \quad \rightarrow \quad \sin(\omega T) = \frac{d\omega}{v} \tag{36}$$

Si usamos la relación trigonométrica $\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T) = 1$ encontramos:

$$\tilde{y}_0 = \frac{v}{\omega}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2\omega^2}{v^2}}\right) \tag{37}$$

Análogamente para $\tilde{v}_x$ y $\tilde{v}_y$:

$$\tilde{v}_x = v_x(T) = vcos(\omega T) = \sqrt{v^2 - d^2\omega^2} \tag{38}$$

$$\tilde{v}_y = v_y(T) = v\sin(\omega T) = d\omega \tag{39}$$

Donde se uso (36) y que $\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T) = 1$. Ahora que por fin conocemos todas las constantes, la altura h a la que llega la partícula usando (24) es:

$$h = \frac{v}{\omega}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2\omega^2}{v^2}}\right) + \frac{d\omega(d_1 - d)}{\sqrt{v^2 - d^2\omega^2}} \tag{40}$$