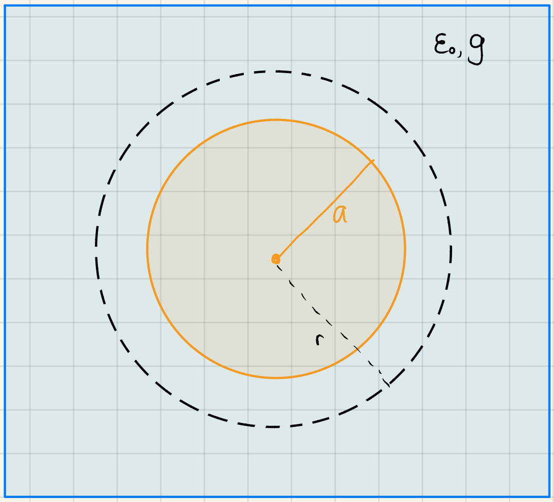
Auxiliar 8

P1



La esfera conductora (naranja) irá cediendo en el tiempo carga al material con conductividad g (material azul). Luego de un tiempo suficientemente grande el sistema alcanzará un equilibrio (etapa estacionaria), pero como nos interesa la carga en el tiempo antes que se alcance el equilibrio, consideremos la ec. de continuidad

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

integremos (1) en el volumen de una esfera de radio r (ver figura)

$$\Rightarrow \int_V \nabla \vec{J}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

y por teo. de Stokes tenemos que $\Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\frac{d}{dt}\int \rho\, d\tau = -\frac{d}{dt} Q(t,r) \quad (2)$

donde definimos $\int_V \rho\, dV \equiv Q(t,r)$ como la carga total de una esfera de radio r (y en función del tiempo)

Recordamos que en los materiales óhmicos tenemos la relación $\vec{J} = g\vec{E}$, entonces calculemos $\vec{E}$.

Para calcular el cpo. eléctrico usamos Ley de Gauss

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(t,r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q(t,r)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad \text{para } a \leq r \quad (3)$$

Notamos que en este caso no usamos el desplazamiento $\vec{D}$, ya que en el material azul estamos en el vacío (por enunciado). Ahora, $\vec{J}$ sería

$$\vec{J}(t,r) = \frac{g\,Q(t,r)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

por lo que $\vec{J}$ saldría de la integral de (2) (al ser constante para un radio r)

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{g\,Q(t,r)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \int_{\partial S} dS = \frac{g\,Q(t,r)}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} \frac{1}{\cancel{r^2}} \cancel{4\pi r^2} = \frac{g}{\varepsilon_0} Q(t,r)$$

así que por (2) tendríamos la EDO, $\quad \frac{g}{\varepsilon_0} Q(t,r) = -\frac{d}{dt} Q(t,r)$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}(t,r) + \frac{g}{\varepsilon_0} Q(t,r) = 0$$

ocupamos polinomio característico $\Rightarrow p(\lambda) = \lambda + \frac{g}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{g}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow Q(t,r) = C_1 \cdot e^{-\frac{g}{\varepsilon_0}t}$$

la constante de integración C_1 la podemos calcular con condición inicial $Q(t=0,a) = Q_0 = C_1 \cdot e^0 = C_1$

$$\Rightarrow Q(t,r) = Q_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon_0}t} \equiv Q(t)$$

donde $Q(t,r)$ finalmente no depende de r, ya que toda esta carga estaría en $r=a$ y el resto se disipa en forma de calor.

b) Notemos que en un tiempo infinito $t \to \infty \Rightarrow Q \to 0$, por lo que toda la carga se va a disipar en forma de calor, así que esta energía que se disipa será, en total, igual a la energía que nos "costó" inicialmente poner la carga Q_0 en $r=a$.

La energía de un sistema está dada por

$$U = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r})\, d\tau \text{, donde } \mathcal{V} \text{ es el volumen donde haya densidad } \rho$$

$$\text{o} \quad U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\infty} E^2(\vec{r})\, d\tau \text{, donde } \mathcal{V} \text{ es todo el espacio posible} \quad (4)$$

Ocupemos la segunda: ya que Q_0 se distribuiría homogéneamente en la superficie $r=a$ (debido a la simetría del problema), el campo eléctrico fuera de este conductor es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2} \text{, para } a \leq r \quad (5)$$

mientras que, como la esfera naranja es conductora dentro suyo el cpo. eléc. es $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ para $r<a$ (6)
así que reemplazando en (4)

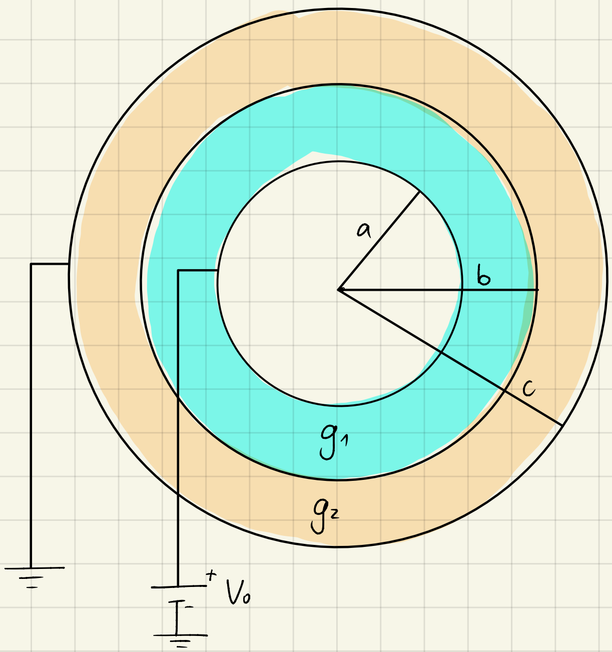
$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} E^2(\vec{r}) \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \cancel{E^2(\vec{r})}^{\,0\ (6)} \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \overset{(5)}{E^2(\vec{r})} \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4} \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \left(\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\int_a^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^{\infty} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

P2



a) Nos dicen que dejemos pasar el suficiente tiempo para que se alcance el estado estacionario, o sea tenemos

$$\nabla \vec{J} + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{\,0} = 0$$

y por simetría del problema el cpo. eléctrico sería únicamente radial, por lo que la densidad de corriente también (por $\vec{J} = g\vec{E}$), así que la divergencia sería

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ(r)) = 0 \Rightarrow rJ(r) = C_1 \Rightarrow \vec{J}(\vec{r}) = \frac{C_1}{r}\hat{r} \quad (1)$$

con C_1 una cte. desconocida. La corriente eléctrica I se calcula como

$$I = \iint \vec{J}\cdot d\vec{S} = \iint \frac{C_1}{r}\hat{r}\cdot(r\,d\phi\,dz\,\hat{r} + dr\,dz\,\hat{\phi} + r\,dr\,d\phi\,\hat{k})$$

$$= C_1 \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}\,d\phi\,dz = C_1\cdot 2\pi L = I \quad (2)$$

entonces expresemos $\vec{J}$ en función de I (que desconocemos su valor, pero sabemos que es cte. (2))

$$(1):\ \vec{J}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi L r}\hat{r}$$

Para encontrar I expresemos el cpo. eléctrico y luego ocupemos la diferencia de potencial. Considerando materiales óhmicos $\vec{J} = g\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{J} = g_1\vec{E}_1 \ \wedge\ \vec{J} = g_2\vec{E}_2$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{I}{2\pi L g_1}\frac{\hat{r}}{r}, \text{ para } a\leq r<b \quad \text{y} \quad \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi L g_2}\frac{\hat{r}}{r}, \text{ para } b\leq r<c \quad (3)$$

Sabemos que la diferencia de potencial entre los conductores es V_0

$$\Rightarrow V_0 - 0 = \Delta V = V(a) - V(c) = -\int_c^a \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_c^b E_2(\vec{r})\,dr - \int_b^a E_1(\vec{r})\cdot dr$$

$$V_0 = -\frac{I}{2\pi L g_2}\int_c^b \frac{dr}{r} - \frac{I}{2\pi L g_1}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi L}\left(\frac{1}{g_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$\Rightarrow I = 2\pi L V_0 \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1}$$

con lo que pudimos calcular I, así que conocemos $\vec{J}$ y $\vec{E}_i$

- $\vec{J}(\bar{r}) = \frac{V_0}{r} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \hat{r}$

- $\vec{E}_1(\bar{r}) = \frac{V_0}{g_1 r} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \hat{r}$, para $a \leq r < b$

- $\vec{E}_2(\bar{r}) = \frac{V_0}{g_2 r} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \hat{r}$, para $b \leq r < c$

b) Para las densidades de carga superficiales en las placas del condensador (en $r=a$ y $r=c$) usamos C.B.

$$E^{\perp}_{above} - E^{\perp}_{below} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Para $r=a$ $E^{\perp}_{above} = E_1(r=a)$ y $E^{\perp}_{below} = 0$ mientras que para $r=c$ $E^{\perp}_{above} = 0$ * y $E^{\perp}_{below} = E_2(r=c)$

- $\sigma_a = \varepsilon_0 E_1(r=a) - 0 = \varepsilon_0 \frac{V_0}{g_1 a} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \Rightarrow Q_a = \sigma_a \cdot 4\pi a^2$

- $\sigma_b = 0 - \varepsilon_0 E_2(r=c) = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{g_2 c} \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1} \Rightarrow Q_c = \sigma_c \, 4\pi c^2$

c) La corriente ya fue calculada

d) Usamos la fórmula $V = R \cdot I$, donde el voltaje en el cilindro es V_0 y su corriente ya la calculamos

$$\Rightarrow R = \frac{V_0}{I} = 2\pi L \left(\frac{1}{g_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{1}{g_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right)^{-1}$$

* Acotación: $E^{\perp}_{above}$ sobre $r=c$ es 0, ya que es el conductor más externo y está conectado a tierra

En algún momento subiré lo otro...