Pauta aux. 7

conceptos:

- susceptibilidad eléctrica χ_e nos dice qué tan susceptible es un medio a polarizarse.
  ↳ $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}).}$$

↑ vector desplazamiento eléctrico. ↑ vector polarización eléctrica.

- $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$
- $\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\left(\varepsilon(\vec{r}) - \varepsilon_0\right)}$

densidad superficial de carga de polarizaø. ⟶ $\boxed{\sigma_P = \hat{n} \cdot \vec{P}}$
↳ normal que sale del dieléctrico.

densidad volumétrica de carga de polarización ⟶ $\boxed{\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}}$

$*\ \dfrac{\rho_T}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E}$

- $\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$
- $\boxed{\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_\ell}$

densidad vol. libre ⟶ $\boxed{\rho_\ell = \nabla \cdot \vec{D}}$

condiciones de borde:

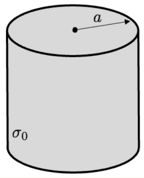
- componentes tangenciales: $E_{1t} = E_{2t}$
  $\varepsilon_2 D_{1t} = \varepsilon_1 D_{2t}$

- componentes normales: $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell$
  $\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_\ell$

P1

Se tiene un cilindro infinito y sólido de radio a, hecho de un material conductor perfecto. El cilindro está cargado de modo que su densidad de carga superficial es σ_0. El gas que rodea al cilindro constituye un medio dieléctrico con constante dieléctrica dependiente del espacio y dada por $\varepsilon(\rho) = \varepsilon_0(1 + a/\rho)$, donde ρ es la distancia al eje del cilindro.

Encuentre:
a) La densidad de carga superficial de polarización en el medio dieléctrico en $\rho = a$. [2 ptos.]
b) La densidad de carga volumétrica de polarización en el medio dieléctrico para $\rho > a$. [2 ptos.]
b) El campo eléctrico $\vec{E}(\rho)$ para todo ρ.[2 ptos.]



$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{a}{\rho}\right)$$

(a)

. para $r<a \Rightarrow Q_{L,enc} = 0$ ya que la carga libre en cond. se encuentra en la superficie.

$$\rightarrow \quad \vec{D} \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz =$$

$$\rightarrow \quad = 2\pi L \rho \vec{D} = 2\pi L a \sigma_0$$ carga superficial está justo en a.

$Q = \iint dq$

$$\Rightarrow \vec{D}(\rho > 0) = \frac{\sigma_0 a}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\left[\cdot\ \vec{D} = \frac{\varepsilon_0 \vec{D}}{\varepsilon} + \vec{P} \rightarrow \vec{D}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\right) = \vec{P} \right]$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \hat{\rho}\ \sigma_0 \frac{a}{\rho}\left(\frac{\varepsilon_0(1 + a/\rho) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0\left(1 + \frac{a}{\rho}\right)}\right) = \hat{\rho}\ \sigma_0 \frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{1 + \frac{a}{\rho}}\right) = \vec{P}$$

$*$ $\hat{n} = -\hat{\rho} \rightarrow \sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{P}$

· Si $\rho = a$:

$$\Rightarrow \sigma_p = \sigma_0 \frac{\rho^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_p = -\frac{\sigma_0}{2}}$$

b) $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho P_\rho)}{\partial \rho} = \frac{-a^2}{\rho}\sigma_0 \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{1}{\rho + a}\right] = \frac{\sigma_0 a^2}{\rho} \cdot \frac{1}{(\rho + a)^2} = \rho_p$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

c) $Q_{Tot, \rho_p} = \iiint \rho_p \, dV = \sigma_0 a^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^\rho \frac{1}{(\rho + a)^2} \, d\rho \, d\phi \, dz$

$$= \sigma_0 2\pi L \int_0^\rho \frac{d\rho}{(\rho + a)^2} = \sigma_0 2\pi L \int_{2a}^{\rho + a} \frac{dx}{x^2}$$

$$= 2\pi L \sigma_0 \left(\frac{1}{x}\right)_{\rho + a}^{2a}$$

$$= 2\pi L \sigma_0 a^2 \left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{\rho + a}\right]$$

Área σ: $2\pi L a = \iint dA = \int_0^L \int_0^{2\pi} a \, d\phi \, dz$

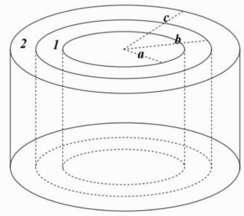
Gauss: $\iint E \cdot dA = \frac{Q_{Tot}}{\varepsilon_0} = 2\pi L \rho \vec{E}$

$$\rightarrow \vec{E}(\rho > a) = \frac{\sigma_0 a}{\varepsilon_0 \rho}\left(1 - \frac{a}{a + \rho}\right)\hat{\rho}$$

$$\rightarrow \vec{E}(\rho < a) = 0$$

P2

Dos superficies cilíndricas de largo infinito y de radios a y c ($a < c$) contienen una densidad superficial de carga libre tal que entre ellas hay una diferencia de potencial $V_c - V_a = \Delta V$, conocida. El espacio entre estas dos superficies está lleno con dos materiales dieléctricos separados por una interfaz cilíndrica de radio b. Estos materiales tiene constantes diléctricas ϵ_1 y ϵ_2, respectivamente, y se sabe que la densidad de carga total en esa interfaz es nula.



a) Muestre que la densidad volumétrica de carga de polarización es cero en ambos dieléctricos.
b) Encuentre la densidad superficial de carga total sobre el cilindro de radio a.
c) Encuentre la densidad superficial de carga libre que debe haber en la interfaz entre los dos dieléctricos.

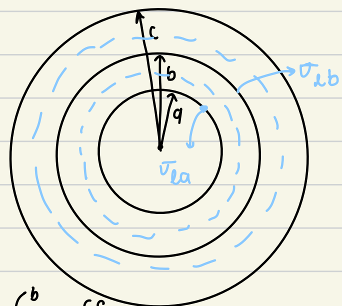
a) · En el interfaz 1, la densidad de polarización es σ_{p2}, en la intermedia es $\sigma_{p1} + \sigma_{p2}$ y en la 2, es σ_{p2}.

· Como en la interfaz en b $\sigma_T = 0 \Rightarrow \underbrace{\sigma_p}_{\sigma_{pa}+\sigma_{pc}} + \sigma_\ell = 0 \Rightarrow \sigma_p = -\sigma_\ell$

· Queremos obtener que $\rho_{1p} = \rho_{2p} = 0$

· Sabemos que $-\nabla \cdot \vec{P} = \rho_p$ por lo que calculamos $\vec{P}$.

· Luego, $\boxed{\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}}$ y $\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$



Notamos que $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_\ell \rightarrow$ carga libre encerrada

Para el dieléctrico 1 $\Rightarrow \oint \varepsilon_1 \vec{E}_1 d\vec{s} = \int \sigma_{\ell a}\, ds$, $\vec{E}_1 = \hat{n} E_1$, $d\vec{s} = \hat{n}\, ds$

$\Delta V = \int_a^b \varepsilon_1 + \int_b^c \varepsilon_2$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \int_0^r ds = \sigma_{\ell a} \int_0^a ds$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cdot \cancel{2\pi} r = \sigma_{\ell a} \cdot \cancel{2\pi} a \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\sigma_{\ell a}}{\varepsilon_1} \frac{a}{r}}$$

Para el dieléctrico 2 $\Rightarrow \int^r \varepsilon_2 E_2\, ds = \int^a \sigma_{\ell a}\, ds + \int^b \sigma_\ell\, ds$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 E_2 r = \sigma_{\ell a} a + \sigma_{\ell b} \cdot b \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\sigma_{\ell a} a + \sigma_{\ell b} \cdot b}{\varepsilon_2 r}}$$

Luego, $\vec{P}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 - \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_1$

$$= \cancel{\varepsilon_1} \frac{\sigma_{\ell a}}{\cancel{\varepsilon_1}} \cdot \frac{a}{r} - \frac{\varepsilon_0 \sigma_{\ell a} \cdot a}{\varepsilon_1 r}$$

$$\vec{P}_1 = \frac{\sigma_{\ell a} a}{r}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\hat{r}$$

$\Rightarrow$ Luego, utilizando la divergencia para coord. cilíndricas:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P}_1 = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r} \cdot \frac{\sigma_{\ell a} \cdot a}{\cancel{r}}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{\ell a} \cdot a\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\right)$, como $\sigma_{\ell a}$, a, ε_0 y ε_1 son ctes,

$$-\nabla \cdot \vec{P}_1 = \boxed{0 = \rho_{p1}}$$

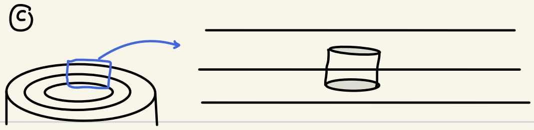
Análogamente $\vec{P}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2$

$$= \cancel{\varepsilon_2}\left(\frac{\sigma_{\ell a} \cdot a + \sigma_{\ell b} \cdot b}{\cancel{\varepsilon_2} r}\right)\hat{r} - \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma_{\ell a} \cdot a + \sigma_{\ell b} \cdot b}{\varepsilon_2 r}\right)\hat{r}$$

$$= \frac{\sigma_{\ell a} \cdot a}{r}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat{r} + \frac{\sigma_{\ell b} \cdot b}{r}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\hat{r} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\sigma_{\ell a} \cdot a + \sigma_{\ell b} \cdot b}{r}\right)\hat{r}$$

$$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P}_2 = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\cancel{r}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\sigma_{\ell a} \cdot a + \sigma_{\ell b} \cdot b}{\cancel{r}}\right)\right] = \boxed{0 = \rho_{p2}}$$

©



· sabemos que la carga total en la interfaz es nula.

$$\Rightarrow \sigma_T = \sigma_{P_b} + \sigma_\ell = 0$$

$$\sigma_{P_a} + \sigma_{P_c} + \sigma_{\ell b} = 0$$

· por condiciones de borde se tiene que $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell \Rightarrow \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma_{\ell b}$

· como la geometría es cilíndrica $\vec{E}\cdot\hat{n} = E \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \sigma_{\ell b}}$

· Por otro lado, se sabe que $\Delta V = V_c - V_a = -\int_a^c \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^b E_1 \cdot dr - \int_b^c E_2 \cdot dr$

* error en el auxiliar: E_1 y E_2 dependen de r!

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{a\sigma_{\ell a}}{\varepsilon_1}\int_a^b \frac{dr}{r} - \frac{a\sigma_{\ell a} + b\sigma_{\ell b}}{\varepsilon_2}\int_b^c \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{a\sigma_{\ell a}}{\varepsilon_1}\ln(a/b) + \frac{a\sigma_{\ell a} + b\sigma_{\ell b}}{\varepsilon_2}\ln(b/c)\cdot\frac{b}{b}$$

$$\Rightarrow \Delta V = E_1(b)\cdot b\ln(a/b) + E_2(b)\cdot b\ln(b/c). \quad (1)$$

Juntando ambas ecuaciones: $E_2(r=b) = \dfrac{\sigma_{\ell b} + \varepsilon_1 E_1(r=b)}{\varepsilon_2}$ (2)

$$\Rightarrow E_1(b)\cdot b\cdot\ln(a/b) + \left(\frac{\sigma_{\ell b} + \varepsilon_1 E_1(r=b)}{\varepsilon_2}\right)\cdot b\cdot\ln(b/c) = \Delta V$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\ell b}\, b\ln(b/c)}{\cancel{\varepsilon_2}} + \left(E_1(b)\cdot b\cdot\ln(a/b)\,\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{\cancel{\varepsilon_2}}E_1(r=b)\,b\ln(b/c)\right) = \Delta V\,\varepsilon_2 \qquad /\cdot\varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\ell b}\, b\ln(b/c) = \Delta V\,\varepsilon_2 - E_1(b)\cdot b\left(\ln(a/b)\,\varepsilon_2 + \ln(b/c)\cdot\varepsilon_1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{\ell b} = \frac{\Delta V\,\varepsilon_2}{b\ln(b/c)} - \frac{\sigma_{\ell a}\cdot a}{\varepsilon_1\, b}\,\frac{\ln(a/b)\,\varepsilon_2 + \ln(b/c)\cdot\varepsilon_1}{\ln(b/c)}}$$

* depende de $\sigma_{\ell a}$

Ⓒ

Luego, aplicamos Ley de Gauss:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

- $\int \vec{E}_1 d\vec{S} = \int \cancel{\rho_{TOT1}}^{\,0}\, dV + \int \sigma_{TOT\,a}\, dS \;/\varepsilon_0$
- $\int \vec{E}_2 d\vec{S} = \int \cancel{\rho_{TOT2}}^{\,0}\, dV + \int \sigma_{TOT\,b}\, dS + \int \cancel{\rho_{TOT1}}^{\,0}\, dV + \int \sigma_{TOT\,a} \;/\varepsilon_0$

$$\Rightarrow E_1\cdot\cancel{A} - E_2\cdot\cancel{A} = \frac{\sigma_{TOT}\cdot\cancel{A}}{\varepsilon_0}$$

$\longrightarrow$ teníamos que ρ_P en ambos dieléctricos es nulo igual que ρ_ℓ en los dieléctricos

$$\Rightarrow E_1 - E_2 = \frac{\sigma_{TOT}}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow Q_{TOT} = \int \sigma_{TOT}\, dS.$

Pero sabemos que en la interfaz $\sigma_{TOT} = 0 \Rightarrow E_1(b) = E_2(b)$.

con el desarrollo anterior se tiene que $E_1 = E_2$:
Luego, reemplazamos las primeras ecuaciones que tenemos para E_1 y E_2:

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\ell a}\, a}{\varepsilon_1 \cancel{b}} = \frac{\sigma_{\ell a}\cdot a + \sigma_{\ell b}\cdot b}{\varepsilon_2 \cancel{b}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\ell b} = \frac{\sigma_{\ell a}\cdot a}{b}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\cdot \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta V\, \varepsilon_2}{b \ln(b/c)} - \frac{\sigma_{\ell a}\cdot a}{\varepsilon_1\, b}\, \frac{\ln(a/b)\,\varepsilon_2 + \ln(b/c)\cdot\varepsilon_1}{\ln(b/c)}\right) = \varepsilon_2 \frac{\sigma_{\ell a}\, a}{b}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V\, \varepsilon_2}{\cancel{b} \ln(b/c)} = \frac{\sigma_{\ell a}\, a}{\cancel{b}}\left(\frac{\ln(a/b)\varepsilon_2 + \ln(b/c)\varepsilon_1}{\varepsilon_1 \ln(b/c)} + \frac{\cancel{\varepsilon_2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \cancel{\varepsilon_2}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V\, \varepsilon_2}{\ln(b/c)} = \sigma_{\ell a}\, a\left(\frac{\ln(a/b)\varepsilon_2 + \cancel{\ln(b/c)\varepsilon_1} + \ln(b/c)(\varepsilon_2 - \cancel{\varepsilon_1})}{\varepsilon_1 \ln(b/c)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V\, \varepsilon_2}{\ln(\cancel{b/c})} = \sigma_{\ell a}\, a\left(\frac{(\ln(a/b) + \ln(b/c))\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \ln(\cancel{b/c})}\right) = \frac{\sigma_{\ell a}\, a \ln(a/c)}{\ln(\cancel{b/c})}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V\, \varepsilon_1}{a \ln(a/c)} = \sigma_{\ell a}} \quad //$$

* Densidad de carga superficial sobre el cilindro de radio a:

$$\vec{E}\cdot\hat{n} = \frac{\sigma_a^{TOT}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_a = \sigma_a^{TOT} \quad //$$

volviendo a b:

$$\sigma_{\ell b} = \frac{\Delta V \cancel{\varepsilon_1}}{\cancel{a} \ln(a/c)}\cdot\frac{\cancel{a}}{b}\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\cancel{\varepsilon_2}\cancel{\varepsilon_1}}\right)\cdot\cancel{\varepsilon_2}$$

$$\boxed{\sigma_{\ell b} = \frac{\Delta V}{\ln(a/c)\cdot b}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \quad //$$