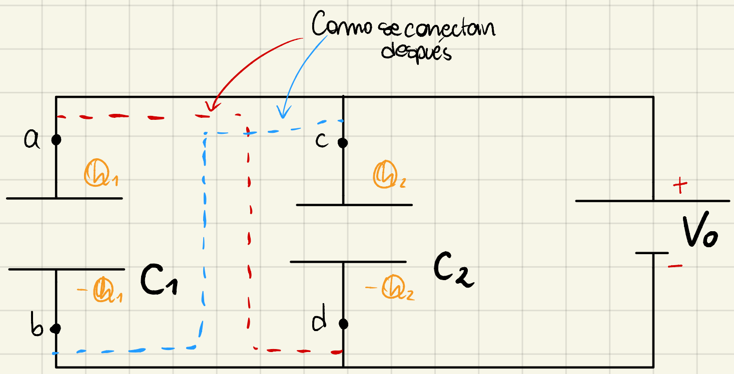
Auxiliar 6

P1

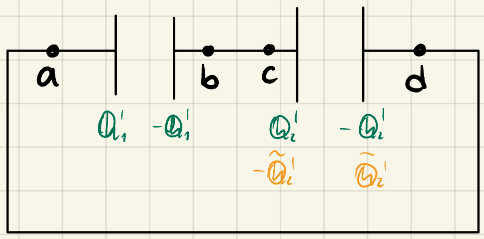


El potencial en todo el circuito es V_0, por lo que la carga de una de las caras de cada condensador está dada por

$$Q_1 = C_1 V_0 \qquad y \qquad Q_2 = C_2 V_0 \qquad (*)$$

y por definición de condensador, la cara opuesta tiene la misma carga, pero con signo negativo

Ahora, de forma instantánea (sin que se pierda la carga del sistema) el nuevo sistema queda como el segundo dibujo



Donde definimos las cargas Q' como las nuevas cargas de cada condensador. Ahora, las cargas se distribuirán en cada tramo manteniendo/conservando la carga de ese tramo antes de desconectarse la batería, o sea tendríamos

$$\underbrace{Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'}_{\text{tramo } a\leftrightarrow d} \qquad o \qquad \underbrace{Q_2 - Q_1 = Q_2' - Q_1'}_{\text{tramo } b\leftrightarrow c}$$

Ambas ecuaciones son lo mismo, utilicemos la primera $\quad (*)$

$$\Rightarrow C_1 V_0 - C_2 V_0 = Q_1' - Q_2' \qquad (1)$$

Como son dos incógnitas, necesitamos otra ecuación. Como el tramo $a \leftrightarrow d$ del segundo dibujo está conectado, entonces están al mismo potencial $\Rightarrow \Delta V = 0$

$$V_i = \frac{Q_i}{C_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_{a\leftrightarrow d} = V_a - V_d = \frac{Q_1'}{C_1} - \frac{(-Q_2')}{C_2} = \frac{Q_1'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$$

$\Delta V = 0$ al estar conectados

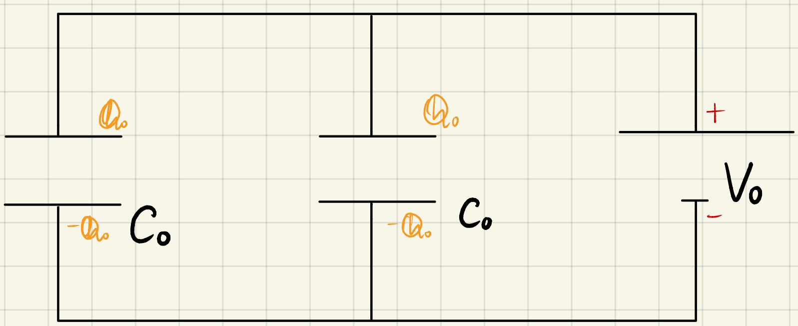
Ahora basta con despejar los Q's

$$(1) \rightarrow Q_1' = V_0(C_1 - C_2) + Q_2' \xrightarrow{\text{en } (2)} \frac{V_0(C_1-C_2)}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_1} + \frac{Q_2'}{C_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow Q_2' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{V_0(C_2 - C_1)}{C_1} = \boxed{\frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} V_0 C_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_1' = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_0 C_1}$$

P2

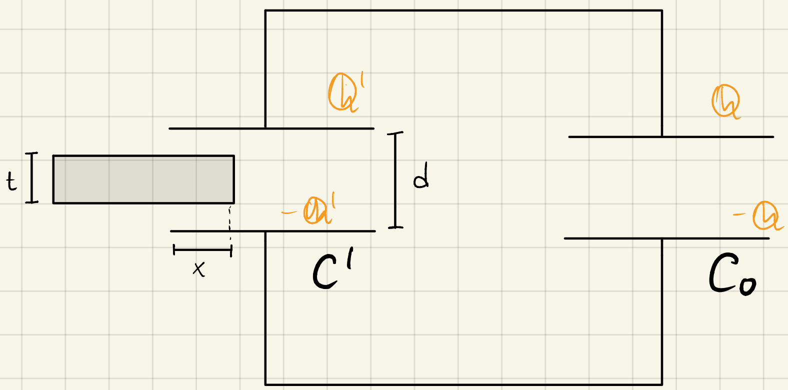


Inicialmente es un problema similar a la P1. Las caras superiores tendrán carga

$$Q_0 = C_0 V_0$$

Luego tenemos el circuito de la segunda figura, donde definimos como C' a la capacitancia del condensador que se está modificando y el otro se matiene como C_0. Por conservación de carga

$$2Q_0 = Q' + Q \quad (1)$$



con Q' la carga en el condensador modificado y Q la del no-modificado. Como $\Delta V = 0$ en cada tramo

$$\Delta V = \frac{Q'}{C'} - \frac{Q}{C_0} = 0 \quad (2)$$

Así que solo nos faltaría encontra C' y podríamos despejar Q y Q' con (1) y (2)

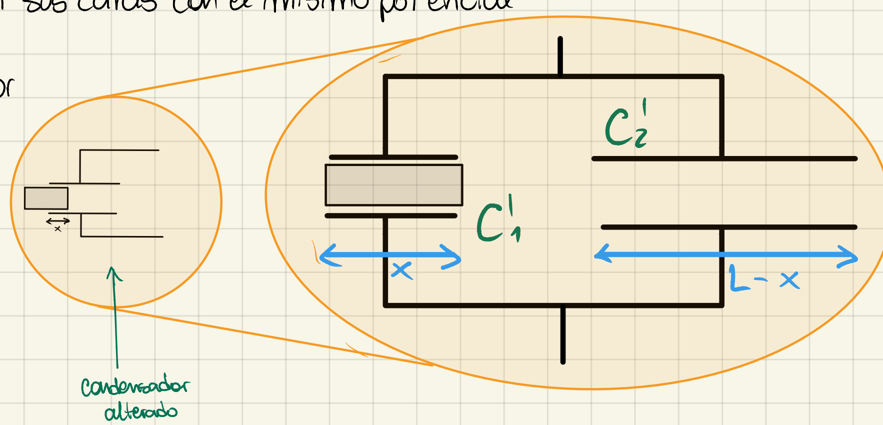
Notamos que el condensador alterado lo podemos "partir" y describir como dos condensadores en paralelo ya que estos "dos nuevos" condensadores tendrían sus caras con el mismo potencial

Recordamos que la capacitancia de un condensador está dada por el área de sus caras, la separación entre estas y el material entremedio

$$C_i = \epsilon_0 \frac{A_i}{d_i}$$

Área

separación



Asumimos un ancho H de las placas

$$\Rightarrow C_1' = \epsilon_0 \frac{Hx}{d-t} \quad y \quad C_2' = \epsilon_0 \frac{H(L-x)}{d}$$

Ver anexo

y como están en paralelo, la capacitancia equivalente sería $C' = C_1' + C_2'$. Ahora, usando que $C_0 = \epsilon_0 \frac{HL}{d}$

$$\Rightarrow C_1' = \frac{C_0 d}{L} \frac{x}{d-t} \quad y \quad C_2' = \frac{C_0}{L}(L-x) = C_0 - \frac{C_0 x}{L} \quad \Rightarrow C' = C_0\left(1 + \frac{t}{d-t}\frac{x}{L}\right) \quad (3)$$

Despejando Q' y Q

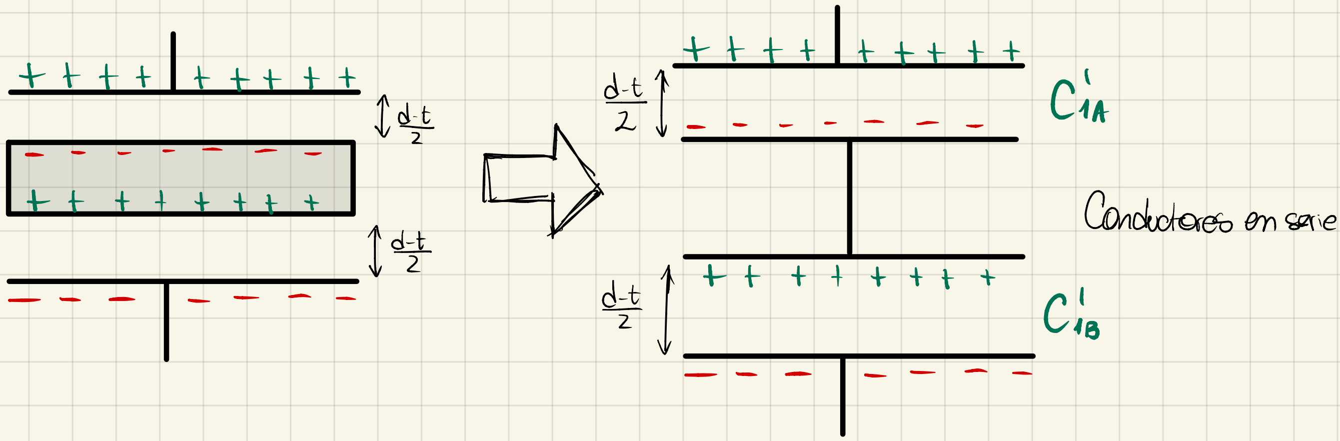
$$(1) \rightarrow Q' = 2Q_0 - Q \xrightarrow{\text{en (2)}} \frac{2Q_0}{C'} - \frac{Q}{C'} - \frac{Q}{C_0} = 0 \quad \Rightarrow Q = 2Q_0 \frac{C_0}{C' + C_0}$$

$$\Rightarrow Q' = 2Q_0 - 2Q_0 \frac{C_0}{C'+C_0} = 2Q_0\left(1 - \frac{C_0}{C'+C_0}\right) = 2Q_0 \frac{C'}{C'+C_0}$$, donde C' es conocido (3)

Y la energía estaría dada por la energía de ambos condensadores, usando $U = Q^2/2C$

$$\Rightarrow U = \frac{Q'^2}{2C'} + \frac{Q^2}{2C_0}$$, donde todo es conocido.

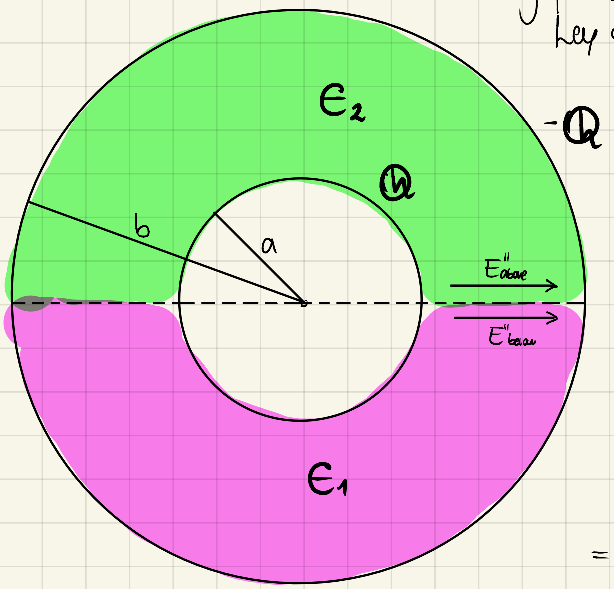
* Anexo: Para calcular C_1' notamos que tenemos el siguiente circuito



Donde tendríamos que $C'_{1A} = C'_{1B} = \epsilon_0 \frac{A}{\frac{d-t}{2}} = \epsilon_0 \frac{2A}{d-t}$ y como están en serie

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C'_{1A}} + \frac{1}{C'_{1B}} = \frac{d-t}{\epsilon_0 A} \Rightarrow C_1' = \epsilon_0 \frac{A}{d-t}$$

P3



Tenemos que considerar que en la superficie $r=a$ hay una carga total Q y por simetría $\vec{E}$ sería únicamente radial, por lo que podemos usar Ley de Gauss generalizada (al tener dieléctrico)

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

Donde desde 0 a π tenemos un material ϵ_2 y de π a 2π un material ϵ_1, por lo que a priori tendríamos dos desplazamientos eléctricos

$$\oint \vec{D}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}' = \oint D(r')\hat{r}'\cdot r'd\phi' dz'\hat{r}'$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^{2\pi} D(r')r'd\phi' dz' = h\left[\int_0^{\pi} D_2(r')r'd\phi' + \int_{\pi}^{2\pi} D_1(r')r'd\phi'\right]$$

$$= h\pi r\left(D_2(r) + D_1(r)\right) \overset{!}{=} Q \quad (1)$$

Pero por C.B. en la interfaz entre ϵ_1 y ϵ_2 $E^{\parallel}_{above} = E^{\parallel}_{below} \equiv E$, por lo que el campo eléctrico sería constante $\forall \phi, z$ a una misma distancia r. Usando la def. del desplazamiento

$$\vec{D}_i = \epsilon_i\vec{E} \Rightarrow D_1 = \epsilon_1 E \quad \wedge \quad D_2 = \epsilon_2 E$$

reemplazando en (1)

$$\epsilon_1 E(r) + \epsilon_2 E(r) = \frac{Q}{h\pi r} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{h\pi r(\epsilon_1+\epsilon_2)}\hat{r} \quad , \text{ para } a\leq r< b$$

Como queremos calcular la capacitancia $C = Q/\Delta V$ debemos calcular la dierencia de potencial

$$\Delta V = V(r=a) - V(r=b) = -\int_b^a \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$$

$$= -\frac{Q}{h\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{Q}{h\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{h\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}{\ln(b/a)}$$