

Auxiliar Extra

P2

Usamos Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en cada sección.

Sección I

Como es un conductor macizo $\Rightarrow \vec{E}_I(\vec{r}) = \vec{0}$

Sección II

No hay carga encerrada $\Rightarrow \vec{E}_{II}(\vec{r}) = \vec{0}$

Sección III

La cantidad de carga que encerremos con un radio r t.q. $R_2 \leq r < R_3$, depende de este radio. Calculamos la carga encerrada como

$$\begin{aligned} Q_{III} &= \int \rho(r') d\sigma' = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^r \rho_0 r' dr' d\phi' dz' \\ &= \rho_0 \pi L r^2 \Big|_{R_2}^r = \rho_0 \pi L (r^2 - R_2^2) \end{aligned}$$

por lo que ocupando Ley de Gauss (considerando cilindros de largo L) es:

$$\oint \vec{E}_{III}(\vec{r}) \cdot d\vec{\sigma}' = E_{III}(\vec{r}) \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{III}}{\epsilon_0}$$

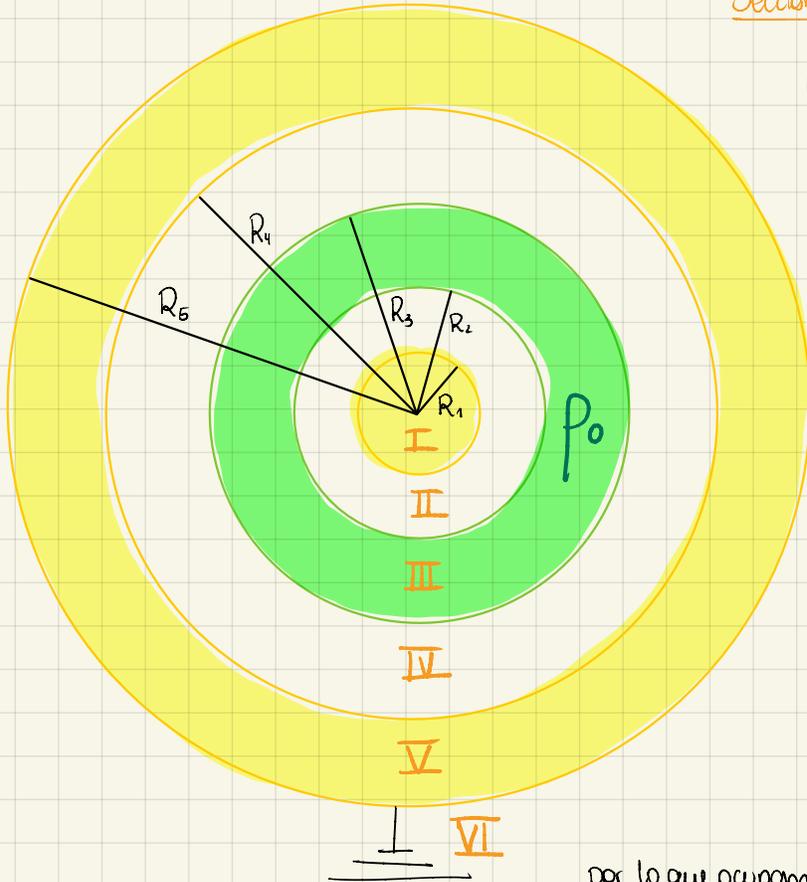
$$\Rightarrow E_{III}(\vec{r}) 2\pi r L = \frac{\rho_0 \pi L (r^2 - R_2^2)}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{III}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 r} (r^2 - R_2^2) \hat{r}, \text{ para } R_2 \leq r < R_3$$

Sección IV

Aquí encerramos toda la carga proveniente de ρ_0 .

$$Q_{IV} = \int \rho(r') d\sigma' = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{R_2}^{R_3} \rho_0 r' dr' d\phi' dz' = \rho_0 \pi L (R_3^2 - R_2^2), \text{ así que con Gauss}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{IV}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 r} (R_3^2 - R_2^2) \hat{r}, \text{ para } R_3 \leq r < R_4$$



Sección V

Estamos dentro de un conductor $\Rightarrow \vec{E}_{\text{II}}(\vec{r}) = \vec{0}$

Sección VI

Como en $r=R_5$ está conectado a tierra (potencial igual a cero) implica que el campo eléctrico es 0 para $R_5 \leq r$. Esto lo pueden ver como

$$\Delta V = V(r=R_5) - V(r=\infty) = - \int_{\infty}^{R_5} \vec{E}_{\text{II}}(\vec{r}') \cdot d\vec{\ell}'$$

$$\Leftrightarrow 0 = - \int_{\infty}^{R_5} E_{\text{II}}(\vec{r}') \cdot dr' \Rightarrow E_{\text{II}} = 0 \quad \forall r \in (R_5, \infty)$$

Para calcular las densidades de carga superficiales inducidas usamos que:

Para $r=R_1$

Dentro del conductor el campo debe ser 0 y para $R_1 \leq r < R_2$ se encierra una carga neta igual a 0, por lo que el campo en II también es 0, así que por condición de borde

$$E_{\text{above}}^+ - E_{\text{below}}^+ = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}, \quad \text{donde } E_{\text{above}}^+ = E_{\text{II}} \text{ y } E_{\text{below}}^+ = E_{\text{I}}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{E_{\text{II}}} - \cancel{E_{\text{I}}} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_1 = 0 \quad * \sigma_1 \text{ es la densidad de carga en } r=R_1$$

Para $r=R_4$ (σ_4)

Analizaremos los campos totales justo antes y justo después de $r=R_4$. Para $R_3 \leq r < R_4$ la única carga encerrada es Q_{II} (ya calculado) y como ya vimos que el cilindro macizo de radio R_1 no aporta al campo total

$$\Rightarrow E_{\text{below}}^+ = E_{\text{II}}(r=R_4) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 R_4} (R_3^2 - R_2^2)$$

mientras que para $R_4 \leq r$ el campo eléctrico total es 0 $\Rightarrow E_{\text{above}}^+ = 0$, por lo que la C.B. nos queda como

$$\cancel{E_{\text{above}}^+} - E_{\text{below}}^+ = \frac{\sigma_4}{\epsilon_0}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 R_4} (R_3^2 - R_2^2) = \frac{\sigma_4}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \sigma_4 = \frac{\rho_0}{2R_4} (R_3^2 - R_2^2)$$

Para $r=R_5$ (σ_5)

Hacemos algo similar. Para $R_4 \leq r < R_5$ el campo eléctrico total es 0 al ser un conductor $\Rightarrow E_{\text{below}}^+ = E_{\text{II}} = 0$

y como el borde está conectado a tierra, digamos que para $R_2 \leq r$ el campo total tiene que ser $0 \Rightarrow E_{\text{above}}^+ = E_{\text{below}}^- = 0$ así que los C.B son

$$E_{\text{above}}^+ - E_{\text{below}}^- = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{E_{\text{II}}} - \cancel{E_{\text{I}}} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \sigma_s = 0$$

b) Para calcular el potencial eléctrico es igual que siempre

$$\Delta V = V(\vec{r}) - V(r=\infty) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}' \cdot d\vec{e}'$$

Calculemos el potencial para cualquier r t.q. $0 < r < R_1$, para que practiquen

$$\Delta V = V_{\text{I}}(r) - \cancel{V(r=R_1)} = - \int_{R_1}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{e}' = - \int_{R_1}^{\vec{r}} E(r') dr'$$

$$= - \int_{R_1}^{\vec{r}} \cancel{E_{\text{II}}(r')} dr' - \int_{R_1}^{R_2} E_{\text{II}}(r') dr' - \int_{R_2}^{R_3} E_{\text{III}}(r') dr' - \int_{R_3}^{R_1} \cancel{E_{\text{II}}(r')} dr' - \int_{R_1}^{\infty} \cancel{E_{\text{I}}(r')} dr'$$

$$= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 r'} (R_3^2 - R_2^2) dr' - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 r'} (r'^2 - R_2^2) dr'$$

$$= - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) \ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right) - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} (R_2^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_3}\right)$$

Para el resto de potenciales cambiamos los límites de integración

$$\triangleright V_{\text{I}}(r) = - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) \ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right) - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} (R_2^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_3}\right) \quad (*)$$

$$\triangleright V_{\text{II}}(r) = - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) \ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right) - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} (r^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_3}\right)$$

$$\triangleright V_{\text{III}}(r) = - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

Así que finalmente, la diferencia de potencial entre los conductores (entre $r=R_2$ y $r=R_1$) es $(*)$ evaluado en $r=R_1$

$$\Delta V_{\text{conductores}} = - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (R_3^2 - R_2^2) \ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right) - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} (R_2^2 - R_3^2) + \frac{\rho_0 R_2^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_3}\right)$$