Pauta Auxiliar 3

Dipolo y campo eléctrico

Profesor: Simón Riquelme
Auxiliares: Antonia Cisternas, Javier Huenupi
Ayudante: Bruno Pollarolo

P1.- Dipolo

Un anillo circular de radio a, almacena una carga Q distribuida uniformemente. En el centro del anillo se encuentra un dipolo puntual $\vec{p}$, alineado según el eje de la espira.

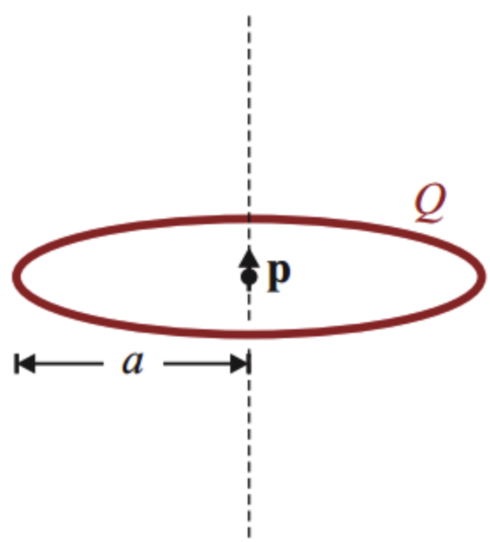
a) Determine la fuerza que el dipolo ejerce sobre el anillo.

b) Demuestre que la fuerza que ejerce un campo eléctrico sobre un dipolo es $\vec{F} = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{E}$. Calcule la fuerza que el anillo produce sobre el dipolo, ¿se verifica la tercera Ley de Newton?

c) Demuestre que la energía de un dipolo en un campo eléctrico viene dada por $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Determine la energía que tiene el dipolo por encontrarse en el campo del anillo.

d) Demuestre que el torque que ejerce un campo eléctrico sobre un dipolo es $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$. Calcule el torque que el anillo ejerce sobre el dipolo

Hint: Para algunos casos le será útil considerar el dipolo como dos partículas en el eje $\hat{k}$ de cargas q y $-q$ en la posición $d/2$ y $-d/2$ respectivamente, donde d es pequeño. Algunas expresiones tendrá que expandirlas en serie de Taylor



Respuesta

a) Como el anillo es una distribución continua de carga (no una carga puntual), para calcular la fuerza actuando sobre él es

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}q' \, \vec{E}(\vec{r}\,') = \int \mathrm{d}l' \, \lambda(\vec{r}\,')\vec{E}(\vec{r}\,') \,,$$

ya que es un anillo 1D. Entonces, debemos expresar el campo eléctrico **generado por el dipolo eléctrico**, en su forma general es:

$$\vec{E}(\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\,(\vec{p}\cdot\hat{r}\,')\,\hat{r}\,' - \vec{p}}{r'^3} \,,$$

pero en este caso tenemos que $\vec{p} = p\hat{k}$ y solo nos interesa este campo en el lugar del anillo, descrito por $\vec{r}\,' = a\hat{\rho}\,'$ (en coordenadas cilíndricas), por lo que el producto punto es

$$\vec{p}\cdot\hat{r}\,' = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r'^3}\hat{k} \,.$$

Ahora, describamos la densidad de carga $\lambda(r')$. Como es un anillo 1D, su longitud (perímetro) es $2\pi a$

$$\Rightarrow \lambda(r') = \frac{Q}{2\pi a} \,,$$

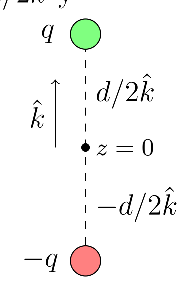
y la integral recorrería $\phi' \in [0, 2\pi]$ con $\rho = a$ constante, así que tendríamos

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} a \, \mathrm{d}\phi' \, \frac{Q}{2\pi a}\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{a^3}\hat{k}\right) \,,$$

como $\hat{k}$ es independiente del ángulo, lo podemos sacar de la integral sin problemas y nos quedaría

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{k}} \tag{1}$$

b) Esta pregunta es para un campo eléctrico externo general. Usemos que un dipolo se puede expresar como dos cargas q y $-q$ en el eje del momento dipolar y en las posiciones $\vec{r}_+ = d/2\hat{k}$ y $\vec{r}_- = -d/2\hat{k}$ respectivamente, donde $d << 1$.



Por lo que cada carga experimentaría una fuerza $\vec{F}_\pm = \pm q\vec{E}(\vec{r}_\pm)$ y la fuerza total sería la suma de cada fuerza por separado

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}_+) - q\vec{E}(\vec{r}_-) \,,$$

y como $d << 1$ podemos hacerle un Taylor a los campos $\vec{E}(\vec{r}_\pm)$ alrededor del origen y en la dirección de $\hat{k}$ (donde se encuentra el dipolo) considerando d pequeño, por lo que nos basta con quedarnos con una aproximación a orden 1

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}_\pm) &\approx \vec{E}(\vec{0}\,) \pm \frac{d}{2}\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\right|_{z=0} \\
\Rightarrow \vec{F} &\approx q\left(\vec{E}(\vec{0}\,) + \frac{d}{2}\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\right|_{z=0}\right) - q\left(\vec{E}(\vec{0}\,) - \frac{d}{2}\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\right|_{z=0}\right) \\
&= qd\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\right|_{z=0} \\
&= \left[\left(p\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E}\,\right]_{z=0} \\
&= \left[\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}\,\right]_{z=0} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Esta expresión es útil para la segunda parte del ítem, ya que solo necesitamos calcular el campo eléctrico en el eje $\hat{k}$ producido por el anillo (no podemos evaluar $z=0$ de inmediato, ya que luego le calculamos la derivada al campo). Usemos lo que ocupamos en **a)**

- $\vec{r} = z\hat{k}$
- $\vec{r}\,' = a\hat{\rho}'$
- $\vec{r} - \vec{r}\,' = z\hat{k} - a\hat{\rho}' \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{z^2 + a^2}$
- $\lambda(r') = \frac{Q}{2\pi a}$
- $\mathrm{d}l' = a\,\mathrm{d}\phi'$
- $\phi' \in [0, 2\pi]$

así que el campo sería

$$
\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{a\,\mathrm{d}\phi'\,(z\hat{k} - a\hat{\rho}')}{(z^2+a^2)^{3/2}}\frac{Q}{2\pi a}\,,
$$

ocupamos que $\hat{\rho}' = \cos\phi'\hat{\imath} + \sin\phi'\hat{\jmath}$

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(z\hat{k}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'\,(z\hat{k} - a\cancelto{0}{\cos\phi'}\,\hat{\imath} - a\cancelto{0}{\sin\phi'}\,\hat{\jmath})}{(z^2+a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qz}{(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{k}\,.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Así que la fuerza sobre el dipolo sería

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= p\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\right|_{z=0} \\
&= \frac{Qp\hat{k}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\right]_{z=0} \\
&= \frac{Qp\hat{k}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(z^2+a^2)^{3/2} - 3z^2(z^2+a^2)^{1/2}}{(z^2+a^2)^3}\right]_{z=0} \\
&= \boxed{\frac{Qp}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{k}}{a^3}\,,}
\end{aligned}
$$

con lo que obtenemos que la fuerza que ejerce el anillo sobre el dipolo es **igual** a la que ejerce el dipolo sobre el anillo, pero con signo contrario.

$$\therefore \text{ Se cumple segunda Ley de Newton}$$

c) Tenemos que la energía almacenada en una distribución de cargas es

$$W = \sum_i q_i V(r_i)\,,$$

así que debemos expresar el potencial $V(r)$ en la posición de cada carga.

Hacemos algo similar a lo del ítem **b)**, pero ahora para el potencial eléctrico. Tenemos que expandiendo en Taylor los potenciales para las cargas que componen el dipolo, se tiene

$$V(\vec{r}_\pm) = V(\vec{0}) \pm \frac{d}{2}\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}\,,$$

así que la energía se calcularía como

$$\begin{aligned}
V_{dip} &= qV(r_+) - qV(r_-) \\
&= q\left(\cancel{V(\vec{0})} + \frac{d}{2}\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}\right) - q\left(\cancel{V(\vec{0})} - \frac{d}{2}\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}\right) \\
&= qd\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} \\
&= -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{0})\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Ya calculamos el campo eléctrico generado por el anillo, ecuación (2), por lo que evaluándolo en el origen

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z=0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{Qz}{(z^2+a^2)^{3/2}}\right|_{z=0} \\
&= \vec{0}\,,
\end{aligned}$$

así que la energía almacenada sería $\boxed{W=0}$.

d) Igual que en los items anteriores, separamos el dipolo en dos cargas. El torque sobre un sólido rígido se calcula según

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}(\vec{r}_i)\,,$$

como estamos trabajando con cargas puntuales $\vec{F} = q\vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r}_+ \times q\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{r}_- \times q\vec{E}(\vec{r}_-)\,.$$

Debemos expandir los campos en torno al origen y **orden 0**, ya que los campos ya están multiplicados por d y $\mathcal{O}(d^2)$ es despreciable, entonces

$$\vec{E}(\vec{r}_\pm) \approx \vec{E}(\vec{0})\,,$$

así que el torque en este caso general quedaría como

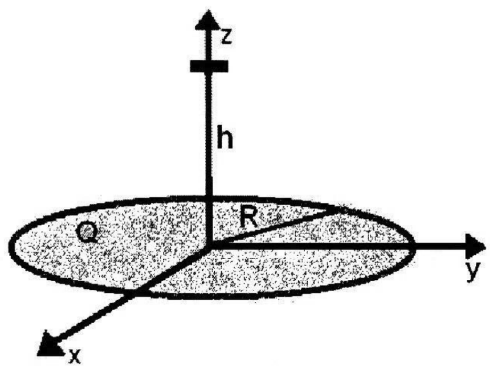
$$\vec{\tau} = q\frac{d}{2}\hat{k} \times \vec{E}(\vec{0}) + q\frac{d}{2}\hat{k} \times \vec{E}(\vec{0}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{0})\,. \quad \square$$

Y en el problema en específico en el que estamos trabajando, como el campo eléctrico generado por el anillo en el origen es nulo, el torque también lo es, $\boxed{\vec{\tau} = \vec{0}}$, o sea, nuestro dipolo, compuesto por las dos cargas mencionadas, **no rota con respecto al origen**.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ Una carga Q se aplicada a un disco circular de material aislante de radio R, de forma que la densidad de carga superficial es proporcional a la distancia radial desde el centro. Demuestre que el campo eléctrico en el eje del disco a una distancia axial h desde el centro es:

$$\vec{E}(h) = \frac{3Qh}{4\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{R+\sqrt{R^2+h^2}}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\hat{k}$$

Hint: Puede serle útil la identidad $\arcsin x = \ln x + \sqrt{1+x^2}$



Respuesta

Como la densidad de carga superficial es proporcional a la distancia radial, sería de la forma

$$\lambda(r') = \alpha\rho'\,,$$

con α una constante a determinar. Imponemos que la carga total sea igual a esta densidad integrada en el área del disco[1] definido, en coordenadas cilíndricas, por $\phi' \in [0, 2\pi]$ y $\rho \in [0, R]$

$$\begin{aligned} Q &= \int \lambda(r')\,\mathrm{d}\sigma' \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \alpha\rho'\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi' \\ &= 2\pi\alpha\frac{R^3}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3Q}{2\pi R^3}\,. \end{aligned}$$

Ahora toca calcular el campo eléctrico, usaremos:

- $\vec{r} = h\hat{k}$
- $\vec{r}' = \rho'\hat{\rho}'$
- $\vec{r} - \vec{r}' = h\hat{k} - \rho'\hat{\rho}' \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{h^2 + \rho'^2}$
- $\lambda(r') = \frac{3Q}{2\pi R^3}r'$
- $\mathrm{d}\sigma' = \rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi'$

[1] Hacer esto es muy común en los problemas

así que tendríamos

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(h\hat{k}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{3Q}{2\pi R^3}\rho' \frac{(h\hat{k}-\rho'\hat{\rho}')\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi'}{(h^2+\rho'^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{(h\hat{k}-\rho'(\cancelto{0}{\cos\phi'}\,\hat{\imath}+\cancelto{0}{\sin\phi'}\,\hat{\jmath}))\rho'^2\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi'}{(h^2+\rho'^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\int_0^R \frac{\rho'^2}{(h^2+\rho'^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\rho' \ ,
\end{aligned}
$$

podemos resolver esta integral con integración por partes, usando

$$
u=\rho \to \mathrm{d}u=\mathrm{d}\rho \ , \qquad \mathrm{d}v=\frac{\rho}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\rho \to v=\frac{-1}{(h^2+\rho^2)^{1/2}} \ ,
$$

así que

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(h\hat{k}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\left[\left.\frac{-\rho'}{(h^2+\rho'^2)^{1/2}}\right|_0^R + \int_0^R \frac{\mathrm{d}\rho'}{(h^2+\rho'^2)^{1/2}}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\left[\frac{-R}{(h^2+R^2)^{1/2}} + \int_0^R \frac{\mathrm{d}\rho'}{(h^2+\rho'^2)^{1/2}}\right] \ ,
\end{aligned}
$$

por la forma de la integral, usamos un cambio de variables a hiperbólicas

$$
\rho = h\sinh u \Rightarrow \mathrm{d}\rho = h\cosh u\,\mathrm{d}u
$$
$$
\rho_0 = 0 \to u_0 = 0 \quad \text{y} \quad \rho_f = R \to u_f = \operatorname{arcsinh}(R/h)
$$

reemplazando

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(h\hat{k}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\left[\frac{-R}{(h^2+R^2)^{1/2}} + \int_0^{u_f} \frac{h\cosh u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{h^2+h^2\sinh^2 u}}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\left[\frac{-R}{(h^2+R^2)^{1/2}} + \int_0^{u_f} \frac{\cosh u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\cosh^2 u}}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\left[\frac{-R}{(h^2+R^2)^{1/2}} + \int_0^{u_f} \mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\left[\frac{-R}{(h^2+R^2)^{1/2}} + \operatorname{arcsinh}(R/h)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Qh\hat{k}}{R^3}\left[\frac{-R}{(h^2+R^2)^{1/2}} + \ln\left(\frac{R}{h}+\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}\right)\right] \qquad \square
\end{aligned}
$$