Problema 1

Debido a la geometría del problema resulta conveniente utilizar coordenadas esféricas con origen en el centro de la estructura circular. Las fuerzas que actúan son el peso $-mg\hat{\mathbf{z}}$, y la interacción con el tubo dada por $\mathbf{N} = N_r\hat{\mathbf{r}} + N_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Es conocido que $\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y, además, debido a la restricción geométrica de la estructura, se cumple $r = R$, y por lo tanto $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Por último, la rotación de la estructura se puede expresar como $\dot{\phi} = \omega_0$, y entonces $\ddot{\phi} = 0$. Con todo lo anterior, las ecuaciones de movimiento, por coordenadas, se escriben como

$$\begin{aligned} N_r - mg\cos\theta &= -mR(\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\sin^2\theta) && \text{(1a)}\\ g\sin\theta &= R(\ddot{\theta} - \omega_0^2\sin\theta\cos\theta) && \text{(1b)}\\ N_\phi &= 2mR\omega_0\dot{\theta}\cos\theta && \text{(1c)} \end{aligned}$$

Considerando que $\dot{\theta}(\theta = 0) = 0$ es posible integrar la Ec. (1b), desde donde se obtiene

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta) + \omega_0^2(1 - \cos^2\theta). \tag{2}$$

De la Ec. (2) se obtiene directamente que

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2g}{R} + \omega_0^2} \tag{3}$$

La velocidad, en coordenadas esféricias, en el conexto de este problema, está dada por la expresión $\mathbf{v} = R\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + R\omega_0^2\sin\theta$, entonces en particular es cierto que

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2gR + \omega_0^2R^2}\hat{\theta} + R\omega_0\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4}$$

Para encontrar N_r usamos la Ec. (1a) junto a la Ec. (1b), ambas evaluadas en $\theta = \pi/2$, con lo que se obtiene

$$N_r(\theta = \tfrac{\pi}{2}) = -2m(g + R\omega^2). \tag{5}$$

De manera similar, para encontrar N_ϕ usamos la Ec. (1c) evaluada en $\theta = \pi/2$ junto a la Ec. (3), desde dónde se obtiene

$$N_\phi(\theta = \tfrac{\pi}{2}) = 0 \tag{6}$$

Problema 2

Usando trigonometría es directo que la posición de la partícula (x, y) está dada por

$$\begin{aligned} x &= (R\sin\theta + (L - R\theta)\cos\theta), && \text{(7a)}\\ y &= (R\cos\theta - (L - R\theta)\sin\theta). && \text{(7b)} \end{aligned}$$

Sabiendo que $\mathbf{v} = \dot{x}\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}\hat{\mathbf{y}}$ se sigue directamente que

$$\mathbf{v} = (L - R\theta)\dot{\theta}(\sin\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\theta\hat{\mathbf{y}}). \tag{8}$$

Notar que en este caso la rapidez es la expresión

$$||\mathbf{v}|| = (L - R\theta)\dot{\theta}. \tag{9}$$