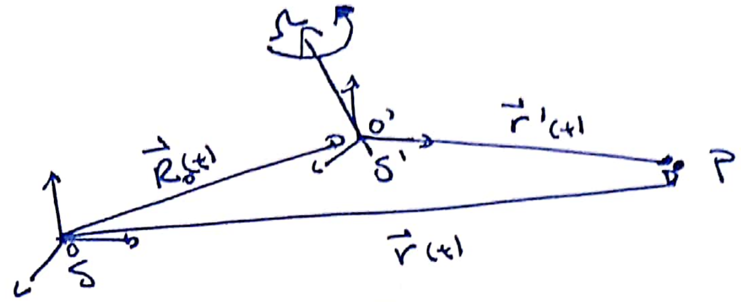
Pauta Aux 9

Cuando consideramos Fuerzas no inerciales:



ocurre que $\vec{r}(t) = \vec{R}_0(t) + \vec{r}'(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$= \vec{V}_0 + \vec{v}' + \vec{\Omega}\times\vec{r}'$$

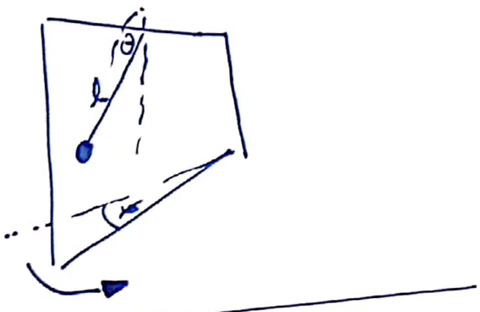
$$\vec{a} = \underbrace{\vec{A}_0}_{\text{aceleración traslacional}} + \vec{a}' + \underbrace{2\vec{\Omega}\times\vec{v}'}_{\text{coriolis}} + \underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}'}_{\text{centrífuga}} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}_{\text{transversal}}$$

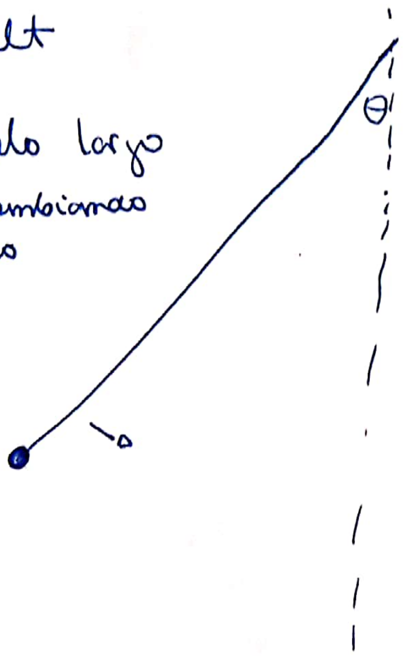
Ahora $m\vec{a} = F$ pero $\vec{a}$ es lo anterior!!

$$\boxed{m\vec{a}' = F - m\vec{A}_0 - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}$$

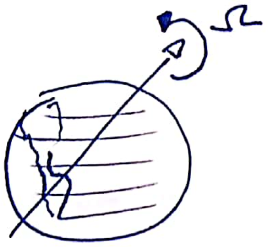
P1) Péndulo de foucault

- péndulo largo
- oscila cambiando de plano





Antes el mov de un péndulo era en un plano, ya que la única fuerza que lo afectaba era $-mg$ y T. Ahora debemos considerar que estamos en el planeta tierra. Donde nosotros estamos en un sistema <u>no inercial</u> (rotamos)

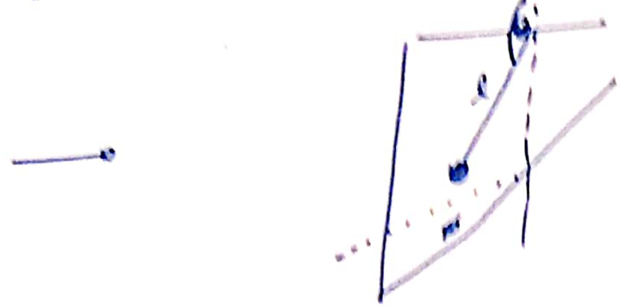


nosotros estamos en el SNI, entonces si queremos saber ec. de mov:

$$m\vec{a}' = F - m\vec{A}_o - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}' - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'$$

donde $\vec{a}'$ es la aceleración según nosotros
v' " " velocidad " "
$\vec{r}'$ " " posición " "
Ω " " rotación de la tierra.

hay que elegir un sistema de coordenadas



elegí esféricas!

como es esférico $m\vec{a} = m[(\ddot{r}' - r\dot{\theta}^2 - r'\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2)\,\hat{r}'$

$+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\hat{\theta}$

$+ \left(\frac{1}{r'\operatorname{sen}\theta}\,\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\,r'^2\operatorname{sen}^2\theta)\right)]\,\hat{\phi}$

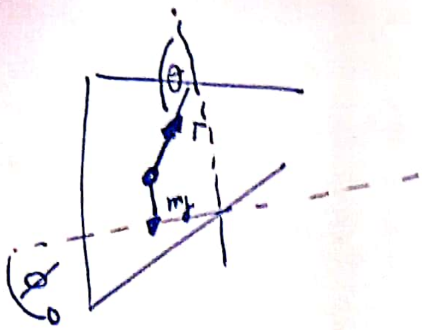
como $r = l \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

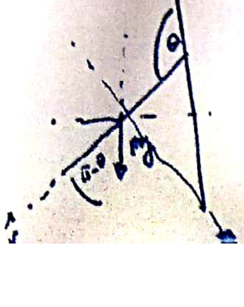
$$m\vec{a}' = m[(-l\dot{\theta}^2 - l\operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2)\,\hat{r}'$$
$$+ (l\ddot{\theta} - l\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\hat{\theta}$$
$$+ \frac{1}{l\operatorname{sen}\theta}\,\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\,l^2\operatorname{sen}^2\theta)\,\hat{\phi}]$$

Ahora por otra parte veamos las $\vec{F}$, solo hay 2 (peso y T)

$\vec{T} = -T\hat{r}$

$m\vec{g} = mg(\cos(\pi-\theta)\,\hat{r} + \operatorname{sen}(\pi-\theta)\,\hat{\theta})$





$m\vec{g} = mg(\cos(\pi-\theta)\,\hat{r} + \operatorname{sen}(\pi-\theta)\,\hat{\theta})$

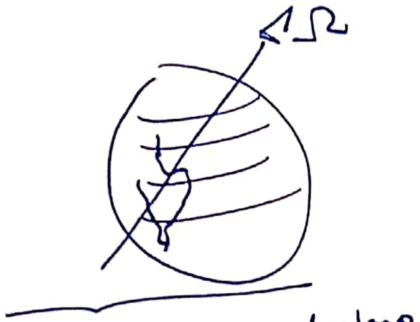
como $m\vec{a}' = F - m\vec{A}_{o'} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{v}'$
$- m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{v}'$

notemos que $\vec{A}_{o'} = cte$ (no nos trasladamos, solo rotamos)

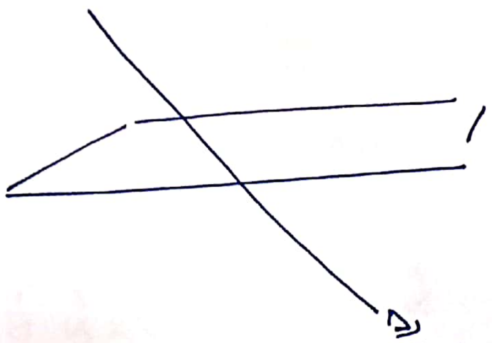
$\dot{\vec{\Omega}} = 0$ (rotación ~ cte)

Por ahora preocupémonos solo de coriolis $(-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}')$ ya que el término de $\vec{A}_o$ solo será una cte.

$\rightarrow m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'$



visto desde el plano de la biblioteca:



$\vec{\Omega} = \Omega\hat{\Omega}$

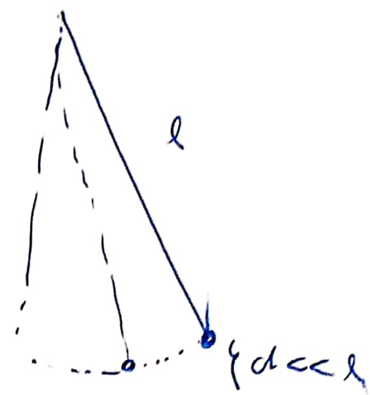
Debemos obtener $\vec{\Omega}\times\vec{v}'$

$\vec{v}'$ en esferas $= \vec{v}' = \cancel{\dot{r}}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$

$$\boxed{\vec{v}' = l\dot{\theta}\hat{\theta} + l\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\theta\,\hat{\phi}}$$

y $\vec{\Omega} = \Omega\hat{\Omega}$

Asumiendo l grande $\rightarrow$ velocidad es horizontal



Por otra parte $\hat{\Omega}$ tiene componente vertical y horizontal

$$\hat{\Omega} = \hat{k} + \hat{\text{horizontal}}$$

$\rightarrow$ como es $\vec{\Omega} \times \vec{r}'$
$\rightarrow$ es prácticamente horizontal

luego solo interesa la componente vertical de $\vec{\Omega}$

$$\rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{r}' = \Omega \cdot \hat{k} \times (l\dot{\theta}\,\hat{\theta} + l\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\phi})$$

Donde Ω depende de la latitud de la bibliotca $\Omega = \Omega_0 \text{sen}(\lambda)$
latitud.

$\rightarrow$ queda

$$= \Omega_0\, \text{sen}(\lambda)\, l\, (\dot{\theta}\, \hat{k} \times \hat{\theta} + \dot{\phi}\, \text{sen}\,\theta\, \hat{k} \times \hat{\phi})$$

Ahora anotemos todas estas ecuaciones en $m\vec{a}' = F + F_{NI}$

$$m\vec{a}' = -T\hat{r}' + mg\cos(\pi - \theta)\hat{r}' + mg\,\text{sen}(\pi - \theta)\hat{\theta} - 2m\Omega_0\,\text{sen}(\lambda)\, l\,(\dot{\theta}\hat{k} \times \hat{\theta} + \dot{\phi}\,\text{sen}\theta\,\hat{k} \times \hat{\phi})$$

Analizemos primero el cambio del plano de oscilación. este está asociado a ϕ, luego estudiemos el sistema en $\hat{\phi}$.

$$\hat{\phi}) \; \vec{a}' = \frac{1}{l \operatorname{sen}\theta} \frac{d}{dt}\left(\dot{\phi} l^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

de las fuerzas ni T, ni mg tienen componente en $\hat{\phi}$

→ de coriolis la componente en $\hat{\phi}$, lo obtenemos multiplicando por $\cdot\hat{\phi}$

$$\rightarrow = -2m\Omega_0 \operatorname{sen}(\lambda) l \left(\dot{\theta}\, \hat{k} \times \hat{\theta} + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \; \hat{k} \times \hat{\phi}\right) \cdot \hat{\phi}$$

recordemos que $\hat{k}$ es como $\hat{z}$, que en esféricas es:

$$\hat{k} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} + \cos\theta\,\hat{r}$$

queda todo

$$\hat{\theta} \times \hat{\theta} = 0$$

$$= -2m\Omega_0 \operatorname{sen}(\lambda) l \left(\dot{\theta}\left(\cancel{-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}} + \cos\theta\,\hat{r}\right) \times \hat{\theta}\right.$$

$$\left. + \underline{\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \left(\cancel{-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} + \cos\theta\,\hat{r}) \times \hat{\phi}}\right.}\right) \cdot \hat{\phi} \quad 0$$

se va ya que es perpendicular a $\hat{\phi}$.

$$= -2m\Omega_0 \operatorname{sen}(\lambda) l \dot{\theta} \cos\theta \underbrace{(\hat{r} \times \hat{\theta}) \cdot \hat{\phi}}_{\cancel{\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}} = 1}$$

$$\text{luego} \quad m\left(\frac{1}{l\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{dt}\left(\dot{\phi} l^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)\right) = -2m\Omega_0 \operatorname{sen}(\lambda) l \dot{\theta} \cos\theta$$

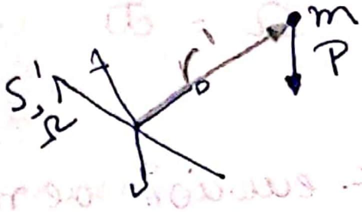
$$= \underbrace{l\ddot{\phi}\sin\theta + 2l\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta}\ = -2\Omega_0 \sin(\lambda)\, l\dot{\theta}\cos\theta$$

sol: $\ddot{\phi} = 0$

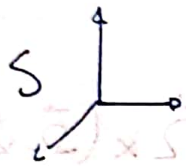
$$\boxed{\dot{\phi} = -\Omega_0 \sin(\lambda)} \longrightarrow \boxed{\phi = -\Omega_0 \sin(\lambda)\, t}$$

↳ vel de rotación del plano!

P1)



Tenemos,



Donde S' se aleja con aceleración $\vec{a}_{o'}$ y gira con $\vec{\Omega}$

Sabemos por SNI que:

$$\vec{F} = m(\vec{a}_{o'} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \vec{a}')$$

Donde $\vec{F} = \vec{P}$

Luego tenemos que

$$\vec{P} = m(\vec{a}_{o'} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + 2\Omega \times \vec{v}' + \Omega \times (\Omega \times r') + \vec{a}')$$

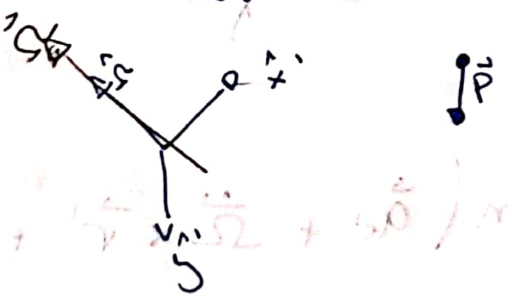
Donde $|\vec{\Omega}| = cte \Longrightarrow$

$$\vec{\Omega} = cte \Longrightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0$$

Luego la ecuación de movimiento de nuestro sistema no inercial es:

$$\vec{P} = m\left(\vec{a}_{0'} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v}') + \vec{a}'\right)$$

Como nos preguntan por el movimiento en el eje $\hat{\Omega}$ y en los demas, diremos que S' es:



Donde en este sistema S':

$$\vec{P} = P_{\Omega}\hat{\Omega} + P_{x'}\hat{x}' + P_{y'}\hat{y}'$$

$$\vec{a}_{0'} = a_{0'\Omega}\hat{\Omega} + a_{0'x'}\hat{x}' + a_{0'y'}\hat{y}'$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{\Omega}$$

$$\vec{v}' = v'_{\Omega}\hat{\Omega} + v'_{x'}\hat{x}' + v'_{y'}\hat{y}'$$

$$\vec{a}' = \frac{d}{dt}\vec{v}'$$

Escaneado con CamScanner

Arreglemos un poco la ecuación:

$$\vec{a}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\Omega}\times v' = \underbrace{\frac{\vec{P}}{m} + \vec{a}_{o'}}_{= cte}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = C_\Omega\hat{\Omega} + C_{x'}\hat{x}' + C_{y'}\hat{y}'$$

$$\boxed{\underline{\vec{a}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \vec{C}}}$$

$\hookrightarrow$ ecuación de mov del S'

Para ver como es el movimiento en $\hat{\Omega}$, podemos proyectar en $\hat{\Omega}$: a través de $\cdot\hat{\Omega}$

$$\left(\vec{a}' + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}'\right)\cdot\hat{\Omega} = \vec{C}\cdot\hat{\Omega}$$

Donde $\vec{\Omega}\times\vec{v}'$ es $\perp$ a $\hat{\Omega} \Rightarrow (\vec{\Omega}\times\vec{v}')\cdot\hat{\Omega} = 0$

$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$ es $\perp$ a $\hat{\Omega} \Rightarrow [\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')]\cdot\hat{\Omega} = 0$

quedando

$$\vec{a}' \cdot \hat{\Omega} = \vec{C} \cdot \hat{\Omega}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt} \vec{r}' \cdot \hat{\Omega}}_{} = C_\Omega$$

$$\underbrace{\frac{d v'_\Omega}{dt} = C_\Omega}_{} \longrightarrow a'_\Omega = C_\Omega$$

hay una aceleración cte en el eje $\hat{\Omega}$

$\Downarrow$

hay un movimiento rectilinio acelerado en $\hat{\Omega}$!

Ahora, para ver el movimiento en los otros ejes desarrollemos vectorialmente la ecuación:

Escaneado con CamScanner

$$\vec{a}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' = \vec{C}$$

$$\rightarrow \quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_{x'} \\ a'_{y'} \\ a'_{\Omega} \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} r'_{x'} \\ r'_{y'} \\ r'_{\Omega} \end{pmatrix} \quad \vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_{x'} \\ v'_{y'} \\ v'_{\Omega} \end{pmatrix}$$

Desarrollemos los producto cruz:

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}' \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{x}' & \hat{y}' & \hat{\Omega} \\ 0 & 0 & \Omega \\ v'_{x'} & v'_{y'} & v'_{\Omega} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega v'_{y'} \\ \Omega v'_{x'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

es lo mismo

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' \Rightarrow \begin{pmatrix} -\Omega r'_{y'} \\ \Omega r'_{x'} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\Omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\Omega r_{y'}'\\\Omega r_{x'}'\\0\end{pmatrix}}_{\begin{vmatrix}\hat{x}' & \hat{y}' & \hat{\Omega}\\0 & 0 & \Omega\\-\Omega r_{y'}' & \Omega r_{x'}' & 0\end{vmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix}-\Omega^2 r_{x'}'\\-\Omega^2 r_{y'}'\\0\end{pmatrix}$$

Luego la ecuación de movimiento nos queda:

$$\begin{pmatrix}a'_{x'}\\a'_{y'}\\a'_{\Omega}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\Omega^2 r_{x'}'\\-\Omega^2 r_{y'}'\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\Omega v_{y'}'\\\Omega v_{x'}'\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{x'}\\c_{y'}\\c_{\Omega}\end{pmatrix}.$$

Quedan 3 ecuaciones:

$\hat{x}'$)

$$a'_{x'} - \Omega^2 r'_{x'} - 2\Omega v'_{y'} = \mathfrak{C}_{x'}$$

$$\boxed{\ddot{x}' - \Omega^2 x' - 2\Omega \dot{y}' = \mathfrak{C}_{x'}}$$

↳ mov eje $\hat{x}'$

Sistema de Edos ~~aco~~ acoplado!

$\hat{y}'$)

$$a'_{y'} - \Omega^2 r'_{y'} - 2\Omega v'_{x'} = \mathfrak{C}_{y'}$$

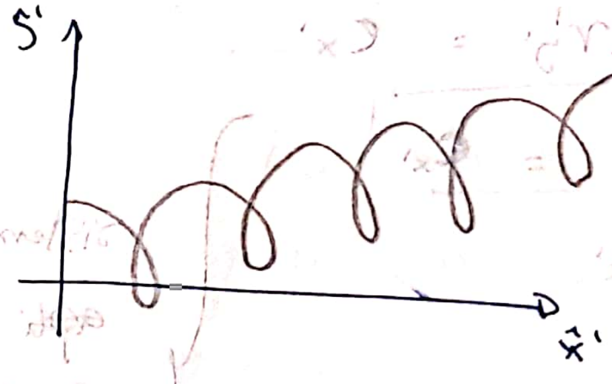
$$\boxed{\ddot{y}' - \Omega^2 y' - 2\Omega \dot{x}' = \mathfrak{C}_{y'}}$$

↳ mov eje $\hat{y}'$

$\hat{\Omega}$)

$$a'_{\Omega} = \mathfrak{C}_{\Omega}$$ (la cual ya la obtuvimos)

no es necesario resolver el sistema pero la solución del problema en los ejes $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ describirá un movimiento:



mientras que en el eje $\hat{\Omega}$ hará un mov. recto y acelerado.

Así se mueven los huracanes en la tierra!