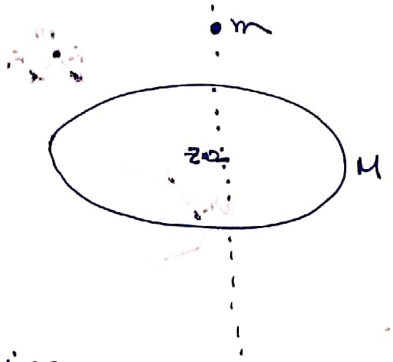
Mecánica

Pauta Aux 7

Tenemos una distribución de masa M de forma de anillo y una masa m en z, pero en medio del anillo

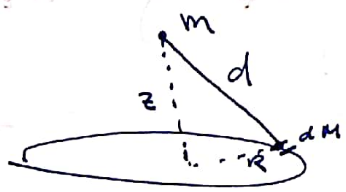
Queremos encontrar F_G



$$\underbrace{F_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

en este caso tenemos que analizar $m_1 = m$ y $m_2 = dM$ (hay muchos "pedazos" de M que interactúan con m en distintas posiciones)

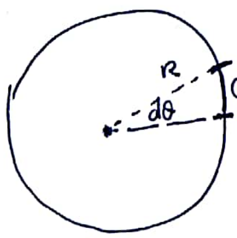
$$\longrightarrow dF = -\frac{G\, m\, dM}{d^2} \quad ; \text{ donde } d^2 = (\text{distancia de } m \text{ a } dM)^2$$



$$\underline{d^2 = z^2 + R^2}$$

con esto $dF = -\dfrac{G\, m\, dM}{z^2 + R^2}$

Veamos también que



$dS = R\,d\theta$, aquí está dM

y $M = \rho V = \rho \cdot S$

$$\longrightarrow dM = \rho\, dS$$
$$= \rho\, R\, d\theta$$

y $\rho = \dfrac{M}{2\pi R} \longrightarrow dM = \dfrac{M\, d\theta}{2\pi}$

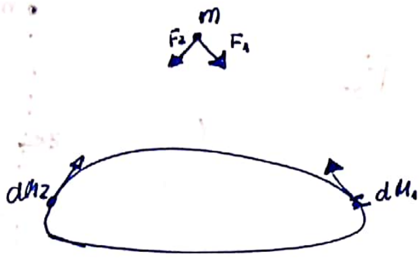
Queda entonces

$$dF = -\frac{Gm \cdot M d\theta}{2\pi (z^2 + R^2)}$$

Notemos que la Fuerza es :

Siempre F tiene proyección en $\hat{z}$ y en otro eje.

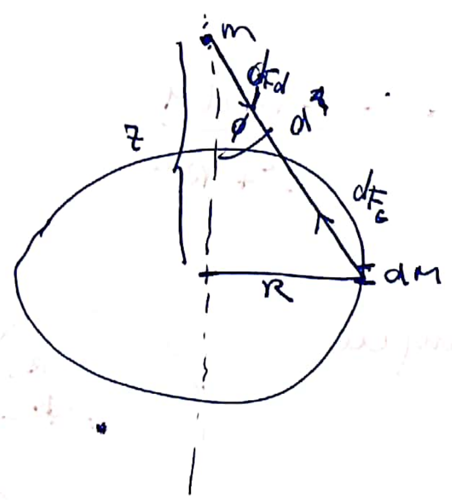
Pero esa F del otro eje siempre se anula por otra Fuerza del otro lado del anillo. por lo que lo único que colabora es la F_z



(las fuerzas que a m lo moverían del centro del anillo se anulan entre sí)

$F_z = \int dF_z$ y dF_z es dF pero solo en z

Hacemos el dibujo



en z es $dF \cdot \cos\phi$

y $\cos\phi = \frac{z}{d} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$

$$\longrightarrow dF_z = -\frac{G m z \, M d\theta}{(z^2+R^2)^{3/2} \, 2\pi}$$

$$F_z = \int_0^{2\pi} -\frac{G m z M d\theta}{(z^2+R^2)^{3/2} \, 2\pi}$$

$$= -\frac{G m z M}{(z^2+R^2) \, 2\pi} (2\pi - 0)$$

$$\boxed{F_z = -G m M \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Ahora queremos perturbar entorno al equilibrio

equilibrio es en $z=0 \longrightarrow z = 0 + \varepsilon(t)$ con $\varepsilon(t) \ll 1$

$$\longrightarrow F = -\frac{G m M \, \varepsilon(t)}{\left((\varepsilon(t))^2 + R^2 \right)^{3/2}}$$

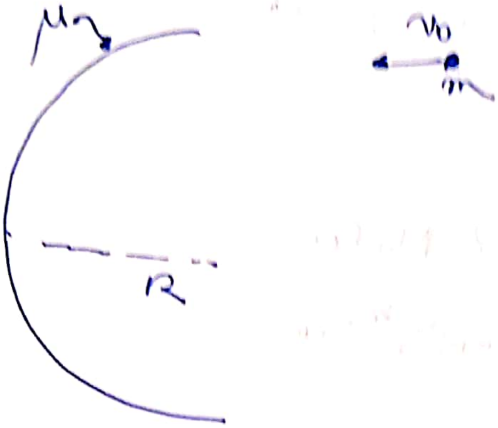
como $\varepsilon(t) \ll 1 \longrightarrow \varepsilon^2(t) <<<<< 1 \longrightarrow \cancel{\varepsilon^2(t)}\ 0$

$$F = \boxed{-\frac{G m M \varepsilon}{R^3} = m \ddot{\varepsilon}} \longrightarrow \boxed{\ddot{\varepsilon} = -\underbrace{\frac{GM}{R^3}}_{\omega^2} \varepsilon}$$

Escaneado con CamScanner

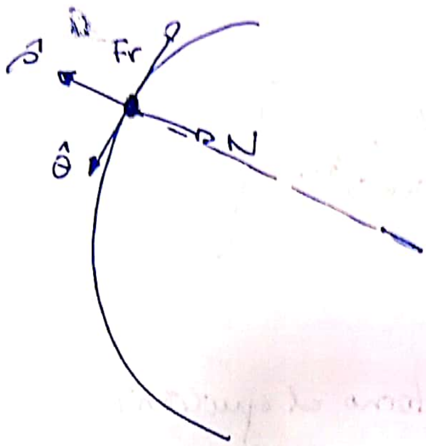
P2)

El problema es



-) Queremos v con que sale del riel.

hacemos DCL



Sistema polar.

$\rightarrow$ $F = m\vec{a}$

$$-N\hat{\rho} - Fr\,\hat{\theta} = m\left(\left(\overset{0}{\cancel{\ddot{\rho}}} - \rho\dot{\theta}^2\right)\hat{\rho} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\overset{0}{\cancel{\dot{\rho}}}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}\right)$$

$$\rightarrow \quad N = mR\dot{\theta}^2 \quad \hat{\rho}$$

$$-Fr = mR\ddot{\theta} \quad \hat{\theta}$$

pero $Fr = \mu N$ $\rightarrow$ $\mu N = mR\ddot{\theta}$

2 ecuaciones:

$$N = mR\dot{\theta}^2 \quad (1) \qquad \text{y} \qquad -\mu N = mR\ddot{\theta} \quad (2)$$

y buscamos $v_f = R\dot{\theta}_f$ (es un círculo)

$\longrightarrow$ encontremos $\dot{\theta}$ usando (1) en (2)

$$-\mu \cancel{m}R\dot{\theta}^2 = \cancel{m}R\ddot{\theta}$$

$$-\mu\dot{\theta}^2 = \ddot{\theta}$$

$$-\mu\dot{\theta}^{\cancel{2}} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cancel{\dot{\theta}}$$

$$-\mu\, d\theta = \frac{1}{\dot{\theta}}\, d\dot{\theta} \qquad \int$$

$$-\mu\int d\theta = \int \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}}$$

$$-\mu\theta = \ln\dot{\theta} + C$$

$$\boxed{\dot{\theta} = K e^{-\mu\theta}} \qquad \text{y al inicio } \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$$

$$\longrightarrow K = \frac{v_0}{R}$$

$$\dot{\theta}(\theta) = \left(\frac{v_0}{R}\right) e^{-\mu\theta}$$

Escaneado con CamScanner

si al inicio $\theta = 0$, al salir $\theta = \pi$

$$\dot{\theta}_f = \frac{v_0}{R} e^{-\mu\pi} \longrightarrow \boxed{v_f = v_0 e^{-\mu\pi}}$$

- ¿Cuanto tiempo demoro?

ya tenemos que $\dot{\theta} = \left(\frac{v_0}{R}\right) e^{-\mu\theta}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{v_0}{R}\right) e^{-\mu\theta}$$

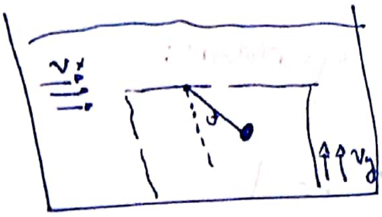
$$\frac{d\theta}{\left(\frac{v_0}{R}\right) e^{-\mu\theta}} = dt \qquad \int_{\text{inicio}}^{\text{final}}$$

$$\frac{R}{v_0} \underbrace{\int_0^{\pi} e^{+\mu\theta} d\theta}_{\frac{1}{\mu} e^{\mu\theta} \Big|_0^{\pi}} = T$$

$$\boxed{\frac{R}{\mu v_0}\left(e^{\mu\pi} - 1\right) = T}$$

3)

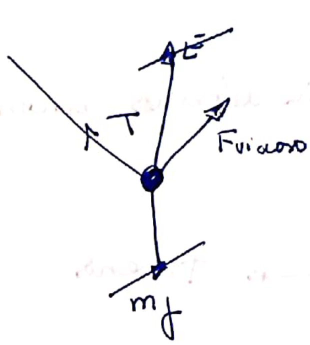
Tenemos :



y queremos ecuación diferencial para θ :

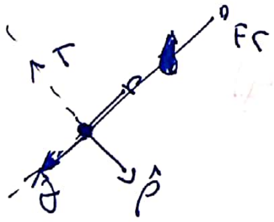
Está sumergido y en equilibrio

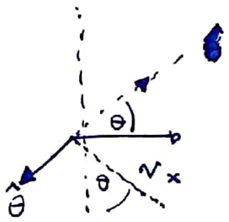
DCL



$\longrightarrow \vec{E} = -\vec{mg}$

tomando polares:





$$F_r = -c \cdot v_{rel} = -c\,(l\dot{\theta} - v_x\cos\theta) \qquad v_x\hat{\theta} = -v_x\cos\theta$$

$\longrightarrow$ en $\hat{\rho} = \Big|\; -T = m(\overset{0}{\cancel{\ddot{\rho}}} - \overset{l}{\rho}\dot{\theta}^2) \longrightarrow T = mR\dot{\theta}^2$

$$\hat{\theta} = (-c(l\dot{\theta}^2 + v_x\cos\theta) = m(\overset{l}{\rho}\ddot{\theta} + \overset{0}{\cancel{2\dot{\rho}\dot{\theta}}}) \longrightarrow ml\ddot{\theta} = -cl\dot{\theta}^2 + c\,v_x\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \text{ecuación: } \ddot{\theta} + \frac{c\dot{\theta}^2}{m} + \frac{c\,v_x\cos\theta}{ml} = 0$$

Ahora buscamos pos equilibrio:

$\longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta} = 0}$

$$\longrightarrow \frac{c V_x \cos\theta}{m\ell} = 0 \Longrightarrow \cos\theta = 0$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}} \checkmark$$

Ahora debemos encontrar oscilaciones si lo perturbamos del equilibrio

$$\longrightarrow \text{tenemos} \quad \ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{c V_x \cos\theta}{\ell m} = 0$$

moverlo del equilibrio es $\theta \longrightarrow (\theta - \theta_{eq})$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}$$

$$\cos(\theta - \theta_{eq}) = \cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta \approx \theta$$

$$\longrightarrow \text{ec.} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{c V_x}{\ell m}\theta = 0}$$

$\hookrightarrow$ oscilador amortiguado.

La ecuación general de amortiguamiento es $\ddot{x} + 2\mu\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

donde cuando $\mu = 1$ es el crítico

$$\longrightarrow 2\mu\omega_0 = \frac{c}{m} \longrightarrow \mu = \frac{c}{2\omega_0 m} = 1$$

$$\boxed{\frac{c}{2m\sqrt{\left(\frac{c V_x}{\ell m}\right)}} = 1} \quad \text{condición.}$$