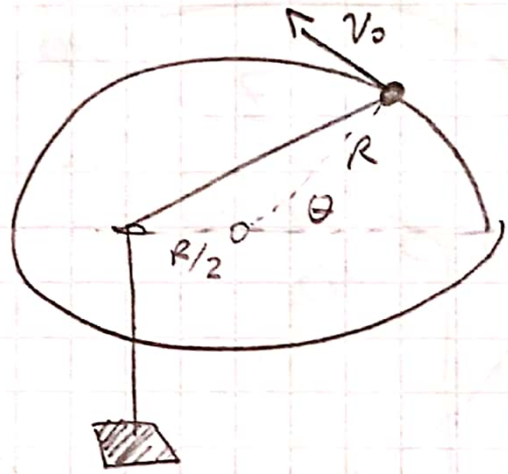
Aux 2

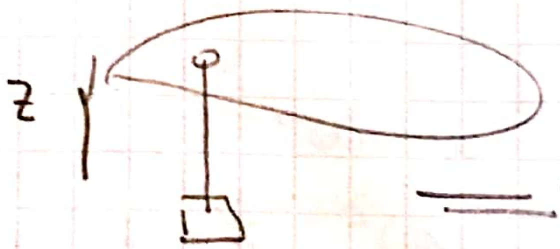
P1

tenemos:



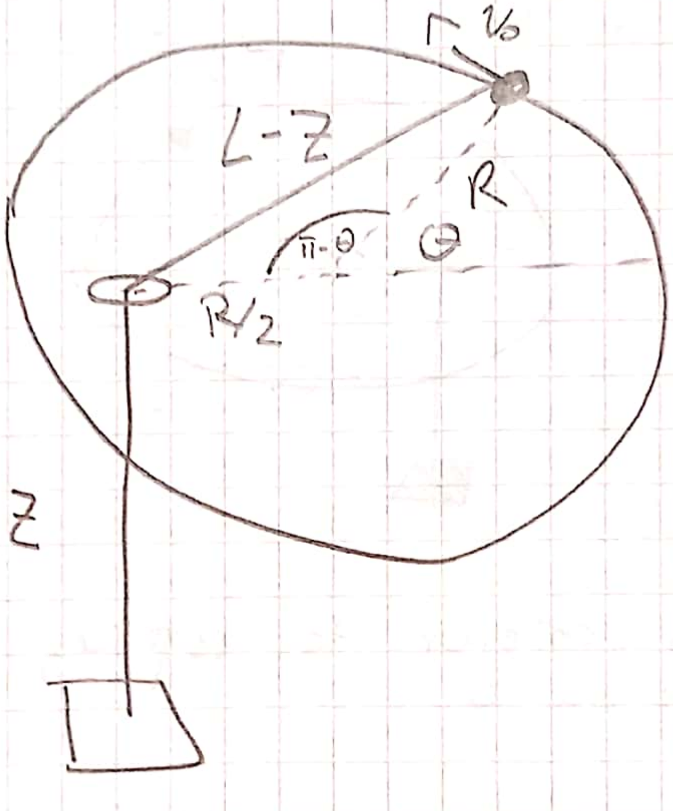
y queremos obtener la rapidez del bloque en función de θ

⟶ Si llamamos z a la altura donde se encuentra el bloque:



⟶ rapidez $= \dot{z} = \frac{dz}{dt}$

Geometricamente como el largo del cordel o cuerda es L



Queremos obtener $Z(\theta)$, para luego $\dot{Z}$

por teorema del coseno:

$$(L-Z)^2 = R^2 + (R/2)^2 - \cancel{2} R \frac{R}{\cancel{2}} \overset{-\cos\theta}{\cancel{\cos(\pi-\theta)}}$$

$$(L-z)^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} + R^2\cos\theta$$

$$(L-z)^2 = R^2\left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)$$

$$L - z = R\sqrt{5/4 + \cos\theta}$$

$$\boxed{z = L - R\sqrt{5/4 + \cos\theta}}$$

luego, como tenemos $z(\theta) \longrightarrow \dot{z}$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(L - R\sqrt{5/4 + \cos\theta}\right)$$

$$= \frac{-R}{2\sqrt{5/4 + \cos\theta}} \cdot \frac{d}{dt}\cos\theta$$

$$\dot{z} = \frac{-R}{2\sqrt{5/4 + \cos\theta}} \cdot -\operatorname{sen}\theta\ \dot{\theta}$$

$$\boxed{\dot{z} = \frac{\overbrace{R\dot{\theta}}^{=v_0}}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5/4+\cos\theta}}}$$

→ rapidez del bloque.

¿Para rapidez máxima?

$$\boxed{\frac{d\dot{z}}{dt} = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{5/4+\cos\theta}}\right) = 0$$

$$\cancel{\frac{v_0}{2}}\cdot\left(\frac{\dot{(\operatorname{sen}\theta)}\cdot\sqrt{5/4+\cos\theta} - \operatorname{sen}\theta\cdot\dot{\left(\sqrt{5/4+\cos\theta}\right)}}{5/4+\cos\theta}\right) = 0$$

$$\frac{\cos\theta\,\dot{\theta}\,\sqrt{5/4+\cos\theta} - \operatorname{sen}\theta\cdot\frac{1}{2\sqrt{5/4+\cos\theta}}\cdot -\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}}{5/4+\cos\theta}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{5/4+\cos\theta}\left(\cos\theta\sqrt{5/4+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{2\sqrt{5/4+\cos\theta}}\right)=0$$

Para que sea 0:

$$\Rightarrow \cos\theta\sqrt{5/4+\cos\theta} = -\frac{\sin^2\theta}{2\sqrt{5/4+\cos\theta}}$$

$$2\cos\theta\left(5/4+\cos\theta\right) = -\sin^2\theta$$

$$\frac{5}{2}\cos\theta + 2\cos^2\theta + \sin^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta + \frac{5}{2}\cos\theta + 1 = 0$$

$$(\cos\theta + 2)\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow \text{sol } \cos\theta = \begin{cases} -2 & \times \text{ no existe} \\ \boxed{-1/2} & \checkmark \end{cases}$$

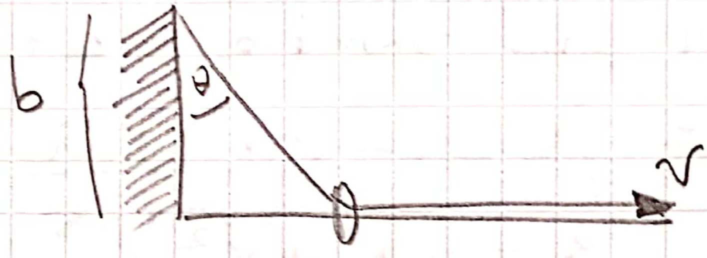
en $\cos\theta = -1/2$ es la rapidez máxima!

$$\cos\theta_{MAX} = -1/2 \longrightarrow \boxed{\theta_{MAX} = \arccos(-1/2)}$$

evaluamos este ángulo en $\dot{y}$ y obtenemos la rapidez máxima!

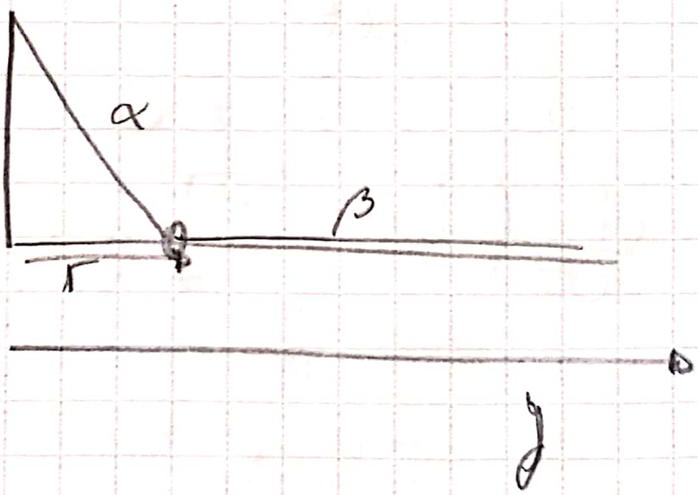
P2)

Tenemos: hilo de largo L



Hay que determinar la rapidez v_0 de la argolla en función de θ:

→ si llamamos r, y, α, β a:



nosotros buscamos $\dot{r}$

$\longrightarrow$ por dato del problema $L = \alpha + \beta$

además $\beta = y - r$

y $\alpha = \sqrt{\beta^2 + r^2}$

juntando estos ③

$$L = \sqrt{\beta^2 + r^2} + y - r$$

y buscamos $\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt}(L) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\beta^2 + r^2} + y - r\right)$$

Escaneado con CamScanner

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+r^2}} \cdot \frac{d}{dt}(r^2) + \dot{y} - \dot{r}$$

v por dato

$$= \frac{\cancel{2} r \cdot \dot{r}}{\cancel{2}\sqrt{\beta^2+r^2}} + \cancel{\dot{y}} - \dot{r}$$

$$= \dot{r}\left(\frac{r}{\sqrt{\beta^2+r^2}} - 1\right) + v$$

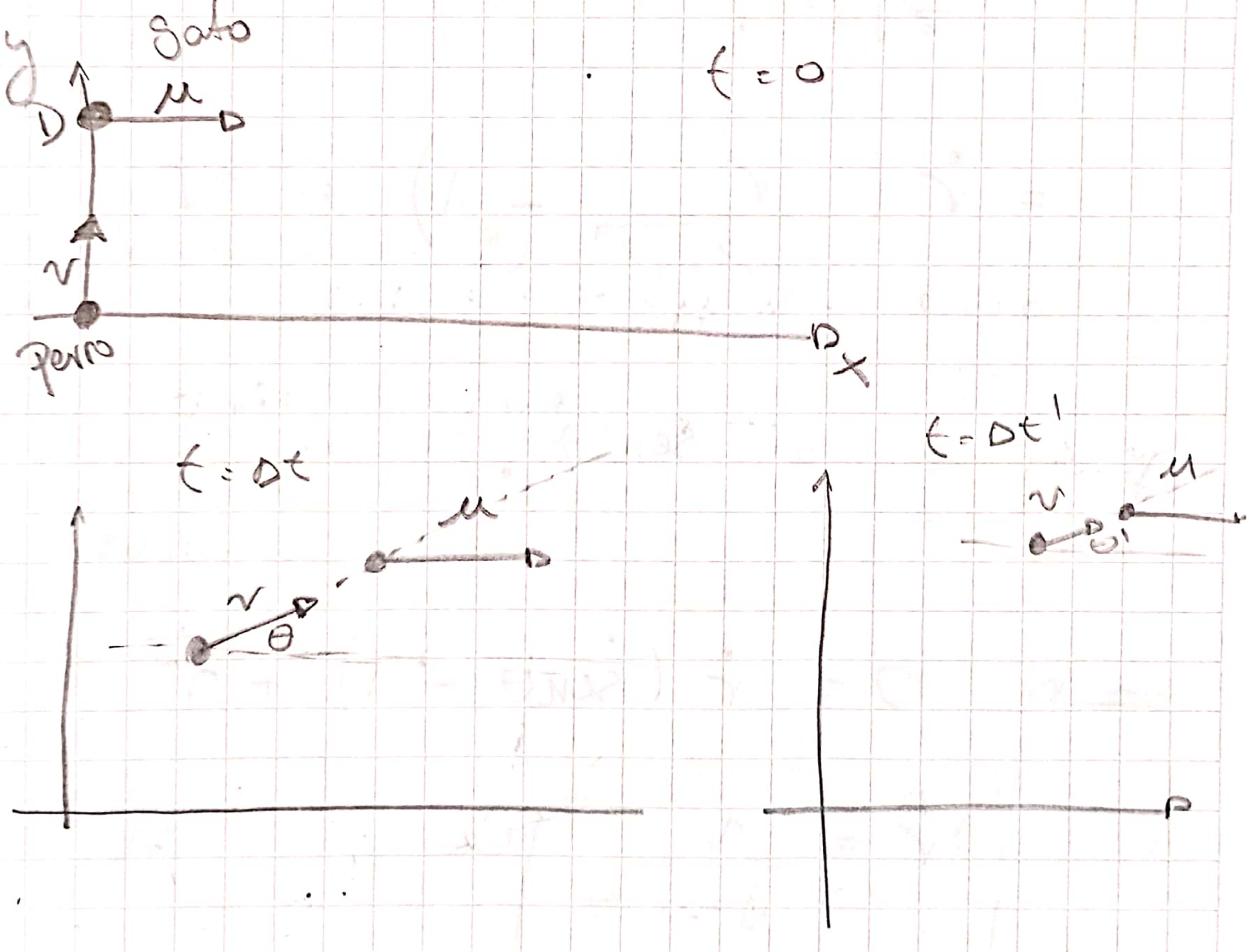
$$y \quad \frac{r}{\sqrt{\beta^2+r^2}} = \operatorname{sen}\theta \; !$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \dot{r}\,(\operatorname{sen}\theta - 1) + v$$

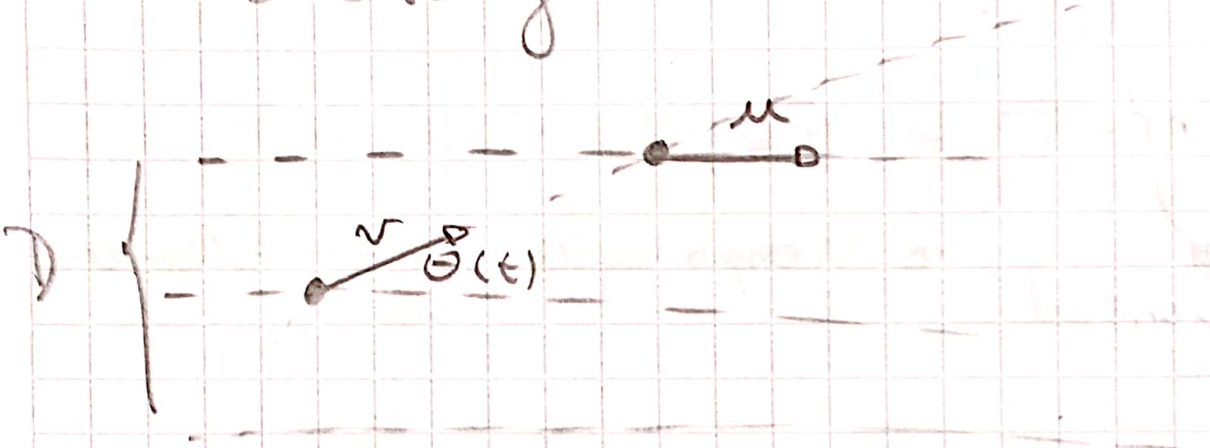
$$\boxed{\dot{r} = \frac{v}{1 - \operatorname{sen}\theta}}$$

P3

Gráficamente el problema es el siguiente:

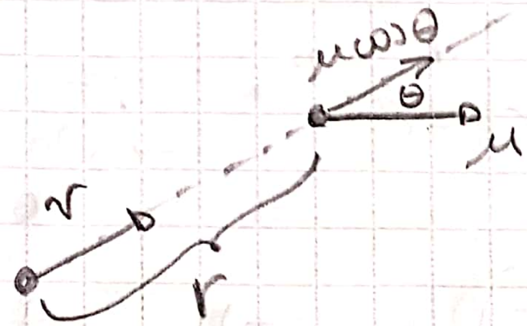


en el caso general:



y lo que queremos es encontrar cuanta distancia recorre el perro antes de encontrar al gato.

$\longrightarrow$ notemos que la distancia entre ambos



$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \mu\cos\theta - v}$$

y lo que queremos es R recorrido , es decir:

$$\underbrace{v}_{\text{velocidad del perro}} \cdot \underbrace{T}_{\text{tiempo antes que lo alcance.}} = R$$

→ Teníamos que $\frac{dr}{dt} = \mu\cos\theta - v$

$$dr = (\mu\cos\theta - v)\,dt$$

ya que se encontraron

$$\int_{r(t=0)}^{0 \; \cancel{r(t=T)}} dr = \int_{t=0}^{t=T} (\mu\cos\theta - v)\,dt$$

$$\Rightarrow -D = -vT + \int_0^T \mu\cos\theta$$

Solo nos falta determinar $\int_0^T \mu\cos\theta$

Para ello notemos que el gato antes que lo alcancen recorre en x:

$$\int_0^T \mu \cdot dt = \mu T$$

y el perro en x debe recorrer lo mismo

$$\int_0^{T} \underbrace{V\cos\theta}_{\substack{\text{componente en x} \\ \text{de su velocidad}}} \, dt = \mu T$$

multiplicando por $\frac{\mu}{\mu}$

$$\int_0^T \frac{V\mu}{\mu} \cos\theta \, dt = \mu T$$

Escaneado con CamScanner

$$\frac{v}{\mu}\int_0^T \mu\cos\theta = \mu T$$

$$\int_0^T \mu\cos\theta = \frac{\mu^2 T}{v}$$

$\longrightarrow$ la ecuación queda:

$$\longrightarrow D = -vT + \mu^2\frac{T}{v}$$

$$-Dv = T(\mu^2 - v^2)$$

$$Dv = T(v^2 - \mu^2)$$

$$\boxed{\frac{Dv}{v^2-\mu^2} = T} \Longrightarrow \boxed{vT = \frac{v^2 D}{v^2-\mu^2}}$$

$\rightarrow$ esto recorre.