Auxiliar 30

P1 Sólido rígido 1

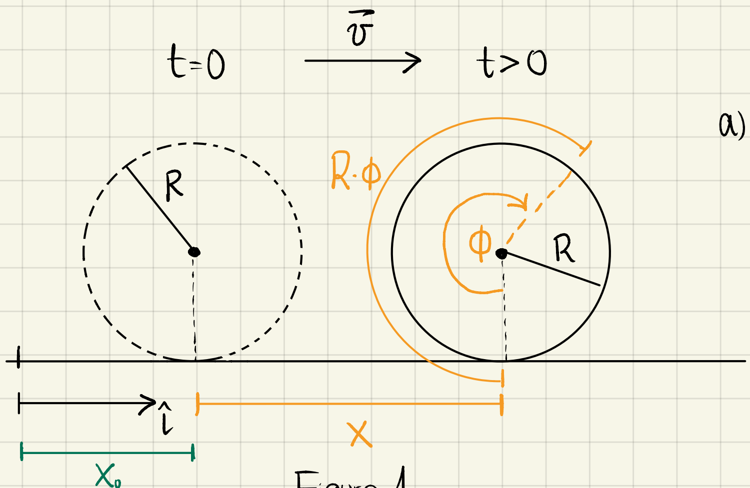


Figura 1

a) De la figura 1 notamos que para un sólido rígido que rueda sin resbalar tenemos la relación

$$R\cdot\phi = x \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{R}$$

donde ϕ es el ángulo que giró desde un $t=0$ hasta un $t>0$. Por lo que la posición del CM, $\vec{R}_{CM}$ sería

$$\vec{R}_{CM} = X_0\hat{\imath} + R\phi\hat{\imath} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = R\dot{\phi}\hat{\imath} = \dot{x}\hat{\imath}$$

Esto lo podemos aplicar a los dos discos del problema : $\dot{\phi}_1 = \dot{x}_1/R$ y $\dot{\phi}_2 = \dot{x}_2/R$, donde notamos que no nos importa la distancia al origen, el x_0, sino que solo la tasa de cambio de las posiciones, los $\dot{x}_i$.

Usando la regla de la mano derecha notamos que las velocidades angulares son en $-\hat{k}$ únicamente

$$\vec{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\phi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}_1}{R} \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}_2}{R} \end{pmatrix}$$

b) La energía cinética de un sist. de sólidos rígidos es la suma de cada K_i por separado

$$K = \sum_{i=1}^{2} K_i = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}M_i|\dot{\vec{R}}_{CM,i}|^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_i^t\, I_{CM,i}\,\vec{\Omega}_i\right)$$

así que necesitamos los $I_{CM,i}$, ambos discos son iguales así que hacemos el cálculo una vez

Como siempre, nos olvidamos que el disco está girando y lo consideramos en reposo. Definimos un sist. cartesianos en naranjo que pasamos al cilíndrico en rojo debido a ser un objeto circular

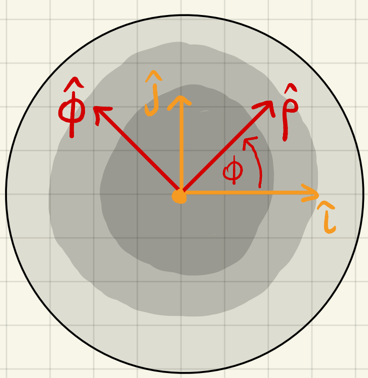


Figura 2

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad dm = \sigma(\rho)\,dA = \frac{6M}{\pi R^4}(R\rho - \rho^2)\,\rho\, d\rho\, d\phi$$

Por exp sabemos que solo los componentes diagonales son $\neq 0$, por lo que cuando hagamos el producto $I_{CM,i}\vec{\Omega}_i$

$$= \begin{pmatrix} I^{11}_{CM} & 0 & 0 \\ 0 & I^{22}_{CM} & 0 \\ 0 & 0 & I^{33}_{CM} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}_i}{R} \end{pmatrix} = -I^{33}_{CM,i}\,\frac{\dot{x}_i}{R}$$

, así que solo necesitamos I^{33}_{CM}

Considerando $\rho \in [0,R]$ y $\phi \in [0,2\pi]$

$$\triangleright\; I^{33}_{CM} = \int_0^{2\pi}\int_0^R (x^2+y^2)\,\frac{6M}{\pi R^4}(R\rho-\rho^2)\,\rho\, d\rho\, d\phi = \frac{6M}{\pi R^4}\int_0^{2\pi} d\phi \cdot \left[R\int_0^R \rho^4 d\rho - \int_0^R \rho^5 d\rho \right]$$

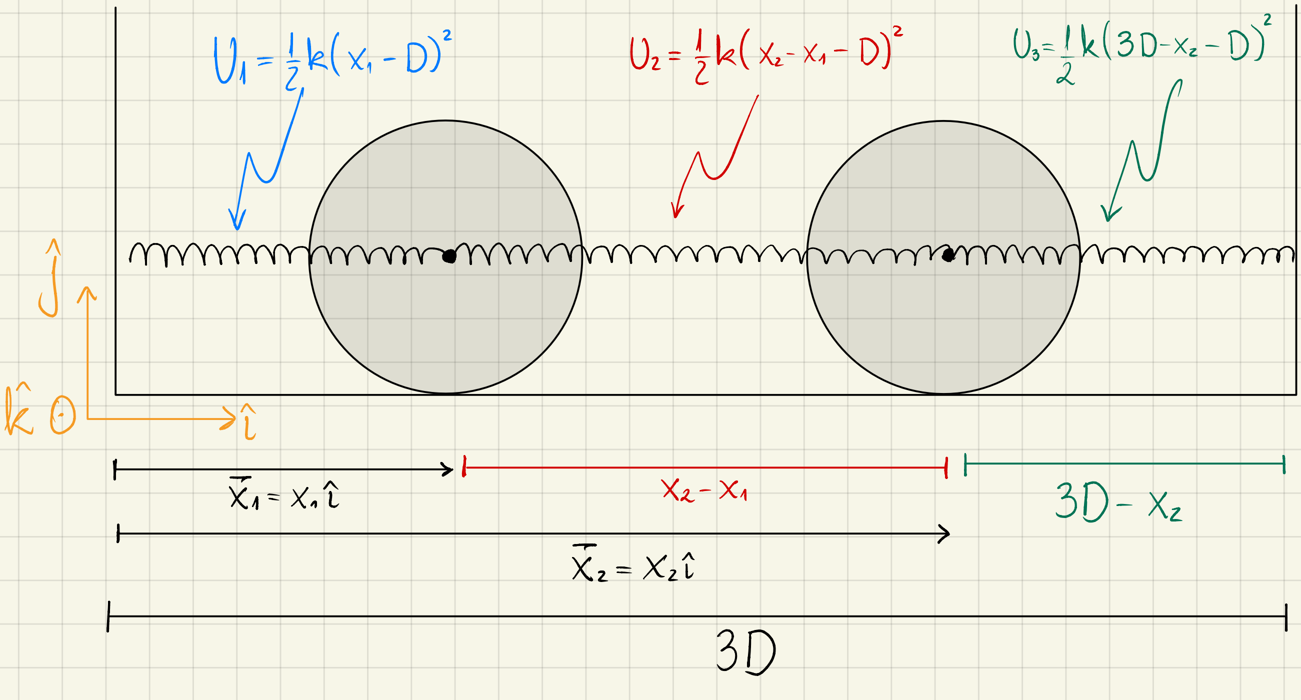
$$= \frac{12M}{R^4}\left[\frac{R^6}{5} - \frac{R^6}{6}\right] = \frac{12M}{R^4}\,\frac{R^6}{6\cdot 5} = \frac{2}{5}MR^2$$

así que $\vec{\Omega}_1^t\, I_{CM,1}\, \vec{\Omega}_1 = (0\;\; 0\;\; -\dot{x}_1/R) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}MR\dot{x}_1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}M\dot{x}_1^2 \quad \wedge \quad \vec{\Omega}_2^t\, I_{CM,2}\, \vec{\Omega}_2 = \dots = \frac{2}{5}M\dot{x}_2^2$

mientras que $\dot{\vec{R}}_{CM,i} = \dot{x}_i\,\hat{\imath} \Rightarrow |\dot{\vec{R}}_{CM,i}|^2 = \dot{x}_i^2$

$$\therefore\; K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{5}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{5}M\dot{x}_2^2 = \frac{7}{10}M\dot{x}_1^2 + \frac{7}{10}M\dot{x}_2^2$$

c) Ahora ocuparemos Lagrangiano $L = K - U = \sum_i K_i - \sum_j U_j$, donde ya tenemos K y para U tenemos la energía potencial de los 3 resortes



$$\Rightarrow U = \sum_i U_i = \frac{1}{2}k(x_1 - D)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - D)^2 + \frac{1}{2}k(2D - x_2)^2$$

$$\therefore\; L = K - U = \frac{7}{10}M\dot{x}_1^2 + \frac{7}{10}M\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - D)^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - D)^2 - \frac{1}{2}k(2D - x_2)^2$$

Ahora calculamos las ecs. de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - D) + k(x_2 - x_1 - D)$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{7}{5} M \dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{7}{5} M \ddot{x}_1$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1 - D) + k(2D - x_2)$$

$$\triangleright\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{7}{5} M \dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{7}{5} M \ddot{x}_2$$

$$\frac{7}{5} M \ddot{x}_1 = -2k x_1 + k x_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_1 + \frac{10}{7}\frac{k}{M} x_1 - \frac{5}{7}\frac{k}{M} x_2 = 0}$$

$$\frac{7}{5} M \ddot{x}_2 = k x_1 - 2k x_2 + 3D$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_2 - \frac{5}{7}\frac{k}{M} x_1 + \frac{10}{7}\frac{k}{M} x_2 - \frac{15}{7}\frac{kD}{M} = 0}$$

lo pueden hacer viendo cuándo los resortes no están ejerciendo fuerza

d) Encontramos los ptos. de equilibrio con $\partial L / \partial x_i = 0 \Rightarrow x_{0,1} = D$ y $x_{0,2} = 2D$

$$\Rightarrow x_1 \equiv D + \delta x_1 \quad \text{y} \quad x_2 \equiv 2D + \delta x_2$$

de esta forma se anula la parte inhomogénea cte. de las ecs. de movimiento

$$\therefore \boxed{\delta \ddot{x}_1 + \frac{5}{7}\frac{k}{M}(2\delta x_1 - \delta x_2) = 0} \ \wedge \ \boxed{\delta \ddot{x}_2 + \frac{5k}{7M}(-\delta x_1 + 2\delta x_2) = 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta \ddot{x}_1 \\ \delta \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{5k}{7M}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \Omega^2_{2\times 2} = \underbrace{\frac{5k}{7M}}_{\equiv \beta}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ec. de autovalores $\det(\Omega^2_{2\times2} - \omega^2 \mathbb{I}_{2\times2}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2\beta - \omega^2 & -\beta \\ -\beta & 2\beta - \omega^2 \end{vmatrix} = (2\beta - \omega^2)^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow 2\beta - \omega^2 = \pm\beta \Leftrightarrow \omega^2 = 2\beta \mp \beta$$

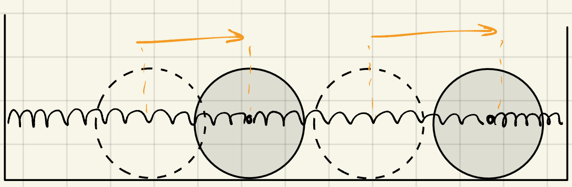
$$\Leftrightarrow \omega_1^2 = \beta \ \wedge \ \omega_2^2 = 3\beta$$

Calculamos los autovectores

$$\begin{pmatrix} 2\beta - \beta & -\beta \\ -\beta & 2\beta - \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow v_1 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\beta - 3\beta & -\beta \\ -\beta & 2\beta - 3\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_2 = -b_2 \Rightarrow v_2 = a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

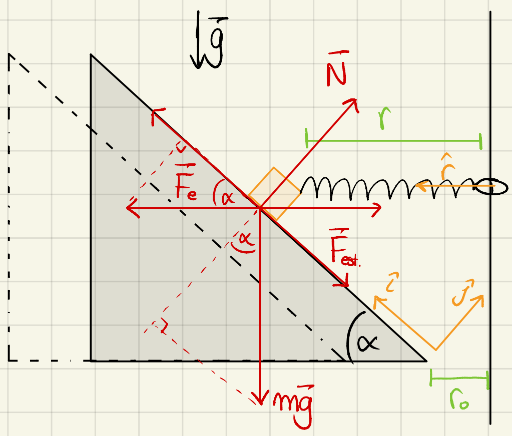
normalizando $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Modo v_1

Modo v_2

P4 Roce 2



a) Definamos r como la distancia variable entre la partícula y la vara y r_0 la distancia variable desde el origen O y la vara.

Identificamos las fuerzas cuando la masa todavía no se mueve

- Normal: $\vec{N} = N\hat{\jmath}$
- Peso: $m\vec{g} = -mg\sin\alpha\,\hat{\imath} - mg\cos\alpha\,\hat{\jmath}$
- Elástica: $\vec{F}_e = -k(r-l_0)\hat{r} = -k(r-l_0)(\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{\jmath})$
- Roce estático: $\vec{F}_{est} = F_{est}\,\hat{\imath}$ ← no nos importa el sentido

En presencia de roce estático, para que una partícula no se mueva se debe cumplir

$$\Big|\sum_{i\neq \text{roce est.}} F_{i,x}\Big| \leq \mu_e |N| \quad (1)$$

↖ solo las componentes $\perp$ a $\vec{N}$

Debemos calcular la expresión de la normal, hacemos segunda Ley de Newton donde $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$

$$m\vec{a} = \sum_i F_i$$

$$m\cancel{\ddot{x}}\,\hat{\imath} + m\cancel{\ddot{y}}\,\hat{\jmath} = N\hat{\jmath} - mg\sin\alpha\,\hat{\imath} - mg\cos\alpha\,\hat{\jmath} - k(r-l_0)(\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{\jmath}) + F_{est}\,\hat{\imath}$$

$\hat{\imath}$) $0 = -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha + F_{est}$

$\hat{\jmath}$) $0 = N - mg\cos\alpha + k(r-l_0)\sin\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha > 0$ ← o sino se despega

reemplazamos esta expresión de N y $\sum_{i\neq\text{roce estático}} F_{i,x} = -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha$ en (1)

$$\Rightarrow \big|\underbrace{-mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha}_{(\mathrm{I})}\big| \leq \mu_e \big|\underbrace{mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha}_{(\mathrm{II})}\big|$$

tenemos que (II) > 0 (de otra forma $N<0$ y la partícula se habría despegado), por lo que podemos quitar ese valor absoluto. Para (I) tenemos que como cuando se venza el roce estático la partícula subirá por la pendiente por lo que (I) > 0 y $\vec{F}_{est.}$ va en la dirección de $-\hat{\imath}$ ya que se opone a que la partícula suba, así que tmb. sacamos este valor absoluto

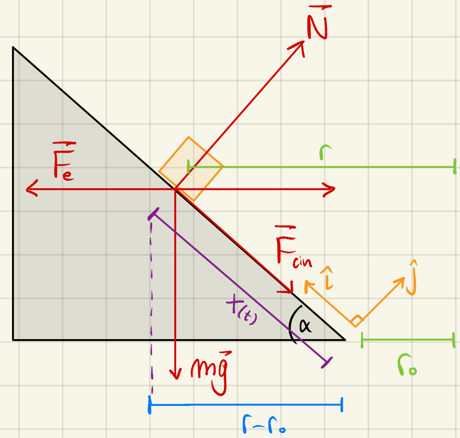
$$\Rightarrow -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha \leq \mu_e(mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha)$$

y como nos interesa el momento justo cuando se vence el roce estático, tomamos la igualdad

$$\Rightarrow -mg\sin\alpha - k(r-l_0)\cos\alpha \overset{!}{=} \mu_e(mg\cos\alpha - k(r-l_0)\sin\alpha) \Leftrightarrow r = \frac{-mg(\sin\alpha + \mu_e\cos\alpha) + kl_0(\cos\alpha - \mu_e\sin\alpha)}{k(\cos\alpha - \mu_e\sin\alpha)}$$

b) Como la partícula comienza moviéndose en $+\hat{\imath}$, en el intervalo de tiempo que estamos interesados tenemos que el roce cinético es:

$$\vec{F}_{cin} = -\mu_c N \hat{\imath}$$



Hacemos segunda Ley de Newton con $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$ y la sum. de fuerzas como

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_{est}$$

$$= N\hat{\jmath} - mg\sin\alpha\,\hat{\imath} - mg\cos\alpha\,\hat{\jmath} - k(r-l_0)\cos\alpha\,\hat{\imath} + k(r-l_0)\sin\alpha\,\hat{\jmath} - \mu_c N\hat{\imath}$$

pero nuestra variable dinámica es x, no r así que los relacionamos $\frac{r-r_0}{x} = \cos\alpha \Leftrightarrow r = x\cdot\cos\alpha + r_0$, reemplazamos en la fuerza elástica

$$m\ddot{x}\hat{\imath} = N\hat{\jmath} - mg\sin\alpha\,\hat{\imath} - mg\cos\alpha\,\hat{\jmath} - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\cos\alpha\,\hat{\imath} + k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha\,\hat{\jmath} - \mu_c N\hat{\imath}$$

$\hat{\imath})$ $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\cos\alpha - \mu_c N$

$\hat{\jmath})$ $0 = N - mg\cos\alpha + k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha > 0$

reemplazamos la normal en $\hat{\imath})$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\cos\alpha + \mu_c mg\cos\alpha - \mu_c k(x\cos\alpha + r_0 - l_0)\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = b,$$

donde $\omega_0^2 \equiv \frac{k\cos^2\alpha}{m} + \frac{\mu_c k\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{m}$ y $b \equiv -mg\sin\alpha - k(r_0 - l_0)\cos\alpha + \mu_c mg\cos\alpha - \mu_c k(r_0 - l_0)\sin\alpha$

Para homogeneizar hacemos $u \equiv x - \frac{b}{\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}$ $\therefore$ $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$ $(*)$

Obtuvimos la expresión de un oscilador armónico de frecuencia angular ω_0, por lo tanto de periodo $T = 2\pi/\omega_0$ así que en el momento que se detiene por primera vez es en $t^* = T/2$ la mitad del ciclo. Sabemos que la sol de $(*)$ es

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{b}{\omega_0^2}$$

donde A y B están dados por C.I., así que el desplazamiento hasta que se detiene es

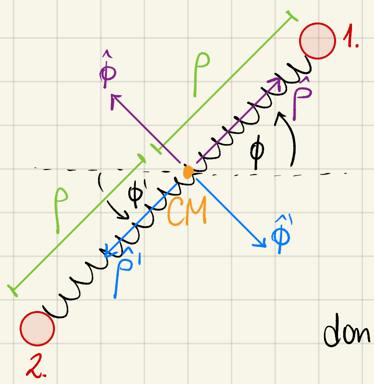
$$x(t^* = T/2 = \pi/\omega_0) = A\cos(\pi) + B\sin(\pi) + \frac{b}{\omega_0^2} = -A + \frac{b}{\omega_0^2}$$

P6 Perturbaciones 1

a) Debido a que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema (el resorte comunica a las partículas del sist.)

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \vec{cte}$$

así que el CM durante todo el mov. se quedará quieto en el espacio (a menos que se le haya dado una velocidad inicial). es como si pusiéramos un clavo en ese punto y las masas rotan en torno a él. Además, el CM estaría justo al medio de la distancia entre la partícula 1. y 2.



pueden considerar que $K_{CM} \neq 0$, pero cte, así que no afecta las EoMs

Ocuparemos lagrangiano, la energía cinética es $K = K_{CM} + K_{1,c/r\,CM} + K_{2,c/r\,CM}$ donde dijimos que $\dot{\vec{R}}_{CM} = \vec{0} \Rightarrow K_{CM} = 0$, mientras que los otros dos términos son las energías cinéticas de 1. y 2. c/r al CM. Definimos dos sist. cilíndricos distintos (pero relacionados $\hat{\rho} = -\hat{\rho}' \wedge \hat{\phi} = -\hat{\phi}'$)

$$\vec{r}_1 = \rho\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} \quad \wedge \quad \vec{r}_2 = \rho\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\rho}\hat{\rho}' + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}'$$

donde $\phi' = \phi \Rightarrow \dot{\phi}' = \dot{\phi}$, así que las energías cinéticas son

$$K_{1\,c/r\,CM} + K_{2\,c/r\,CM} = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) = m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2)$$

Ahora definamos la energía potencial. Como hay un solo resorte $\Rightarrow$ solo una contribución a la energía potencial

$$U = U_e = \frac{1}{2}k(r-a)^2 = \frac{1}{2}k(2\rho - a)^2$$

$$\therefore L = K - U = m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}k(2\rho - a)^2$$

Calculemos las ecs. de Euler-Lagrange para los dos grados de libertad: ρ y ϕ

- ▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \rho} = 2m\rho\dot{\phi}^2 - 2k(2\rho - a)$
- ▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = 2m\dot{\rho} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = 2m\ddot{\rho}$

$$2m\ddot{\rho} = 2m\rho\dot{\phi}^2 - 2k(2\rho - a) \quad (1)$$

- ▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0$
- ▷ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2m\rho^2\dot{\phi}$

conservación

$$\frac{d}{dt}(2m\rho^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow 2m\rho^2\dot{\phi} = cte = L \quad (2)$$, el momentum angular del sistema

Reemplazando (2) en (1) $\Rightarrow 2m\ddot{\rho} = 2m\rho\dfrac{L^2}{4m^2\rho^4} - 2k(2\rho - a) \Longleftrightarrow \ddot{\rho} - \dfrac{L^2}{4m^2\rho^3} + \dfrac{2k\rho}{m} - \dfrac{ka}{m} = 0 \quad (*)$

que todavía no tiene forma de oscilador armónico (esto queremos), notemos que si hacemos $\rho = a/2 + \delta\rho$ con $\delta\rho << 1$ cancelamos el término inhomogéneo

$$\ddot{\delta\rho} - \frac{L^2}{4m^2(a/2+\delta\rho)^3} + \frac{2k}{m}\delta\rho = 0 \quad (3)$$

ya que $\rho = a/2$ es un pto. de equilibrio cuando $L=0$. Ahora, hagamos un Taylor al término cúbico c/r a $\delta\rho_0 = 0$

$$\frac{1}{(a/2+\delta\rho)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(a/2+\delta\rho)^3}\right)^{(n)}\Bigg|_{\delta\rho=0} \cdot (\delta\rho - \overset{=0}{\cancel{\delta\rho_0}})^n = \frac{8}{a^3} - \frac{3}{(a/2+\delta\rho)^4}\Bigg|_{\delta\rho=0} \cdot \delta\rho + O(\delta\rho^2)$$

$$\approx \frac{8}{a^3} - \frac{48}{a^4}\delta\rho$$

Reemplazamos esta aproximación en (3)

$$\ddot{\delta\rho} - \frac{L^2}{4m^2}\left[\frac{8}{a^3} - \frac{48}{a^4}\delta\rho\right] + \frac{2k}{m}\delta\rho = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta\rho} + \left[\frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}\right]\delta\rho = \frac{2L^2}{m^2a^3} \longleftarrow \text{movimiento armónico!}$$

donde identificamos la frecuencia de oscilación $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}}$

Aproximación con serie de Taylor

No importa si hacemos el Taylor para (3) o con $(*)$, para este último tendríamos

$$\frac{1}{\rho^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{\rho^3}\right)^{(n)}\Bigg|_{\rho=a/2}(\rho - a/2)^n = \frac{1}{(a/2)^3} - \frac{3}{\rho^4}\Bigg|_{\rho=a/2}(\rho - a/2) + O((\rho-a/2)^2)$$

nuestro nuevo x_0

$$\approx \frac{8}{a^3} - \frac{48}{a^4}(\rho - a/2) = \frac{8}{a^3} + \frac{24}{a^3} - \frac{48}{a^4}\rho = \frac{32}{a^3} - \frac{48}{a^4}\rho$$

reemplazando en $(*)$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} - \frac{L^2}{4m^2}\left[\frac{32}{a^3} - \frac{48}{a^4}\rho\right] + \frac{2k\rho}{m} - \frac{ka}{m} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\rho} + \left[\frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}\right]\rho = \overbrace{\frac{ka}{m} + \frac{8L^2}{m^2a^3}}^{\text{constante}}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{12L^2}{m^2a^4} + \frac{2k}{m}$$, con lo que obtenemos lo mismo