FI-2001 Mecánica - Sección-4
Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Sergio Godoy y Francisco Parra
FCFM, Universidad de Chile

Control 1

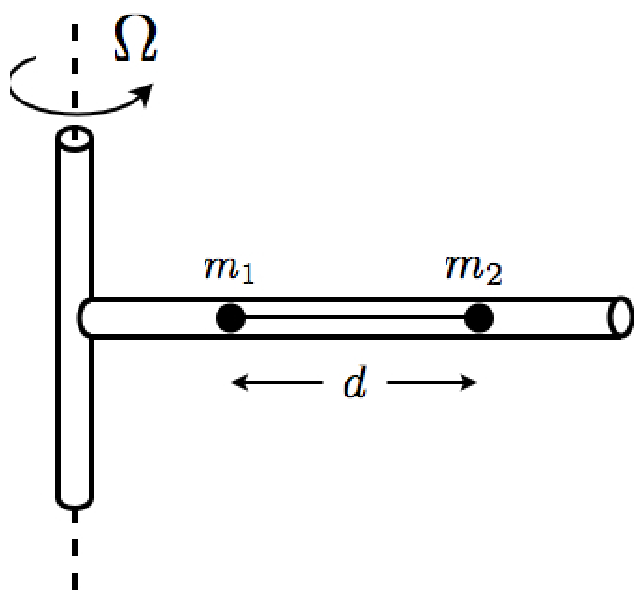
Miércoles 21 de Abril, 2010 - Tiempo: 2h y 30m

P1: Dos partículas de masas m_1 y m_2, que están unidas por una cuerda de largo d, se mueven sin roce por el interior de un tubo horizontal (ver figura) que gira con velocidad angular constante Ω en torno a la vertical. Inicialmente se suelta al sistema en reposo, con la partícula de masa m_1 a una distancia R del eje de giro.

(a) Escriba las ecuaciones de movimiento y sepárelas en ecuaciones escalares.

(b) Resuelva las ecuaciones de movimiento y encuentre las distancias de las partículas al eje $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$, como funciones explícitas del tiempo.

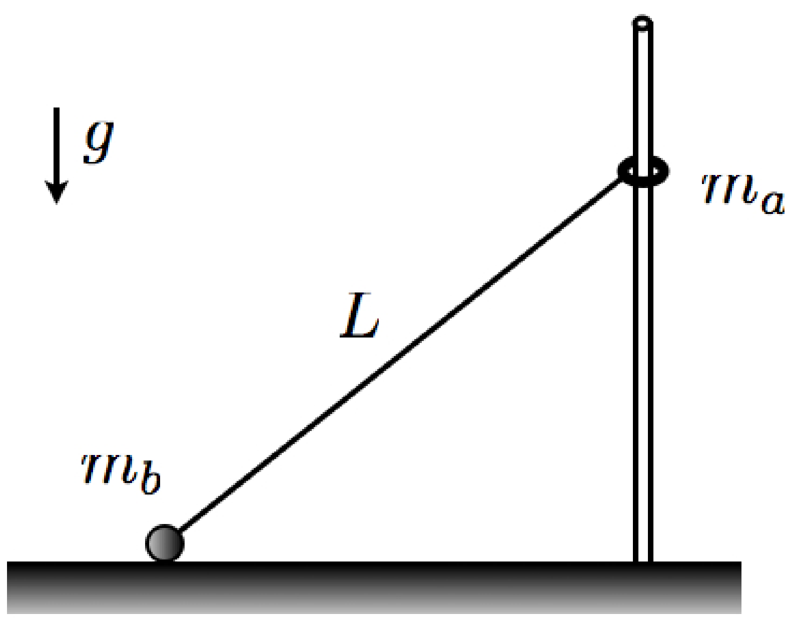
(c) Calcule el valor de la tensión de la cuerda.



P2: Considere un anillo de masa m_a que puede deslizar sin roce a lo largo de una barra vertical fija sobre una superficie horizontal. El anillo se encuentra atado mediante una cuerda de largo L a una partícula de masa m_b colocada sobre la superficie horizontal . En $t = 0$ el anillo a está en contacto con el plano, el hilo está estirado y se comienza a aplicar una fuerza vertical F_v de magnitud variable sobre el anillo de modo que a asciende por la barra con rapidez constante v_0

(a) Determine la rapidez y la magnitud de la aceleración de b en función de su distancia x a la base de la barra vertical, mientras b no pierde contacto con la superficie horizontal.

(b) Calcule la tensión en la cuerda y la magnitud de la fuerza F_v en el momento que la partícula b se encuentra a una distancia $L/2$ de la base de la barra vertical, suponiendo que cuando se alcanza esa posición la partícula b aún no pierde contacto con la superficie horizontal.



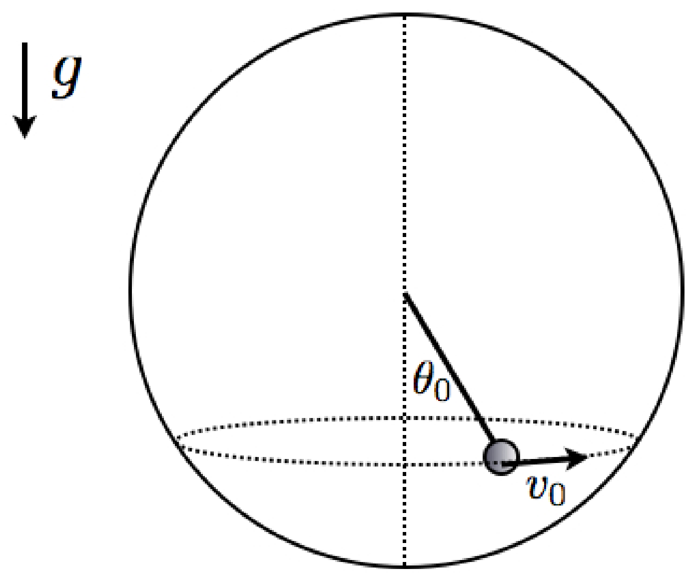
P3: Una partícula de masa m se lanza en la superficie interna de un cascarón esférico de radio R, sometida a la acción de la gravedad. Estando en una posición que forma un ángulo θ_0 de la vertical, la partícula se lanza horizontalmente con una rapidez inicial v_0, como se indica en la figura.

Mientras la partícula no se despegue del cascarón obtenga:

(a) $d\phi/dt$ en función de θ.

(b) $d\theta/dt$ en función de θ.

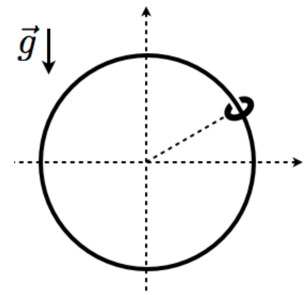
(c) Si $\theta_0 = \pi/4$, determine el valor de v_0 de modo que la partícula suba hasta un ángulo máximo $\theta = 2\pi/3$. Muestre que en ese punto la partícula no se despega del cascarón.



FI-2001 Mecánica - Sección-2
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Felipe Isaule y José Zolezzi
FCFM, Universidad de Chile

Control 1

Miércoles 10 de Abril, 2013
Tiempo: 3horas

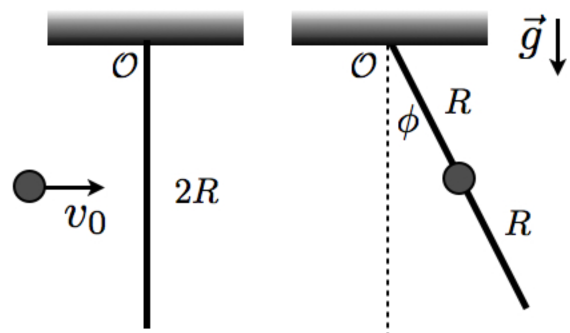


P1: Se tiene un aro de radio R contenido en un plano vertical. Un pequeño anillo desliza sin roce comenzando su movimiento desde el reposo a partir del punto más alto del aro.

(a) Encuentre el punto H del aro en que la aceleración de la partícula es horizontal.

(b) Dé el vector fuerza normal cuando el anillo pasa por el punto H.

P2: Una barra rígida de largo $2R$ y masa m tiene uno de sus extremos fijo al punto $\mathcal{O}$, que actúa como pivote. Inicialmente ($t = 0^-$) la barra está en posición vertical y en reposo. En el instante $t = 0$ una partícula de masa m golpea a la barra en su punto medio y se queda pegada a ella. La partícula traía velocidad horizontal de magnitud v_0. El proceso de choque y pegado no involucra fuerzas externas al sistema.



(a) (**1 pt.**) Obtenga el valor del momento angular con respecto al punto $\mathcal{O}$ del sistema antes de la colisión.

(b) (**2 pts.**) Calcule el momento angular con respecto al punto $\mathcal{O}$ del sistema barra-partícula para una velocidad angular arbitraria $\dot{\phi}$.

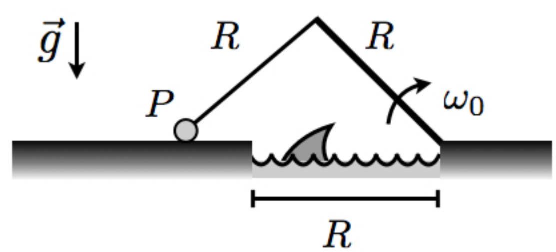
(c) (**1 pt.**) Usando los resultados de las partes **(a)** y **(b)**, deduzca la velocidad angular inicial $\dot{\phi}_0$ (para $t = 0^+$) del péndulo barra-partícula. (Recuerde que la colisión involucra sólo fuerzas internas en el sistema barra+partícula).

(d) (**1 pt.**) Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función de ϕ para $t \geq 0$.

(e) (**1 pt.**) Determine el valor máximo que alcanza el ángulo ϕ. Obtenga la desigualdad que debe obedecer v_0 para que $\phi_{\max} \leq \pi/2$.

Indicación: Note que se habla de los instantes 0^- y 0^+ debido a que la velocidad angular de la barra sufre una discontinuidad en $t = 0$, pasando de 0 a un valor finito.

P3: Para pasar un bulto P de masa m de un lado al otro de un río de ancho R se utiliza el método que sigue (ver figura). P se ata a una cuerda de largo R que está unida al extremo superior de una vara de largo R; el extremo inferior de la barra tiene un punto de giro en la orilla derecha del río (figura). La barra se hace girar desde su posición horizontal con velocidad angular ω_0 en torno a una rótula a la orilla del río. Si toma la posición inicial del bulto como el origen, entonces la distancia entre el origen y la rótula es $2R$. Despreciando todo roce:



(a) Demuestre que mientras la carga va por tierra firme la tensión de la cuerda es constante. Determine su valor.

(b) Determine el valor que debe tener ω_0 para que P se despegue del suelo justo antes de llegar al río.

FI-2001 Mecánica - Sección-4
Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Sergio Godoy y Francisco Parra
FCFM, Universidad de Chile

Control 2

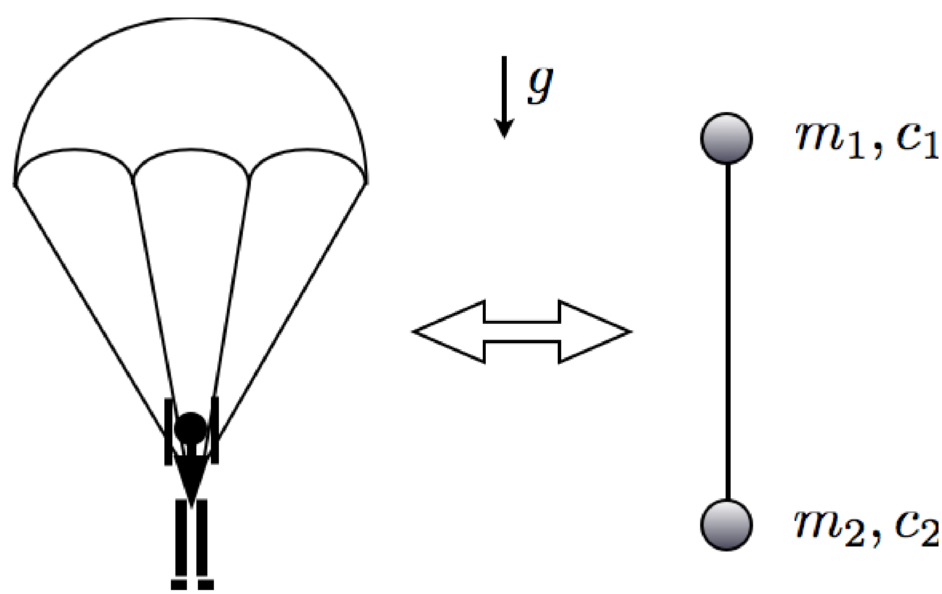
Miércoles 26 de Mayo, 2010 - Tiempo: 2h y 30m

P1: La caída de un paracaidista puede ser modelada como el movimiento de dos partículas de masa m_1 (el paracaídas) y m_2 (la persona) que están unidas por una cuerda de largo L. Sobre el paracaídas y la persona se ejercen fuerzas viscosas del tipo $\vec{F} = -c\vec{v}$ (v es la velocidad), con coeficientes c_1 y c_2, respectivamente. Las condiciones son tales que $m_2 > m_1$ y $c_2 < c_1$. Suponga además que la cuerda está siempre tensa y el movimiento es vertical (no hay efecto del viento).

(a) Determine la velocidad límite de la persona antes que se abra el paracaídas. (Para esta parte, observe que el sistema persona + paracaídas tiene masa $m_2 + m_1$ pero coeficiente de roce c_2).

(b) Luego de haber alcanzado la velocidad límite, la persona abre el paracaídas. A partir de ese instante ($t = 0$) determine la velocidad de caída en función del tiempo.

(c) Calcule la tensión de la cuerda en función del tiempo, a partir del instante cuando se abre el paracaídas. Muestre ahora, que la cuerda está siempre tensa.

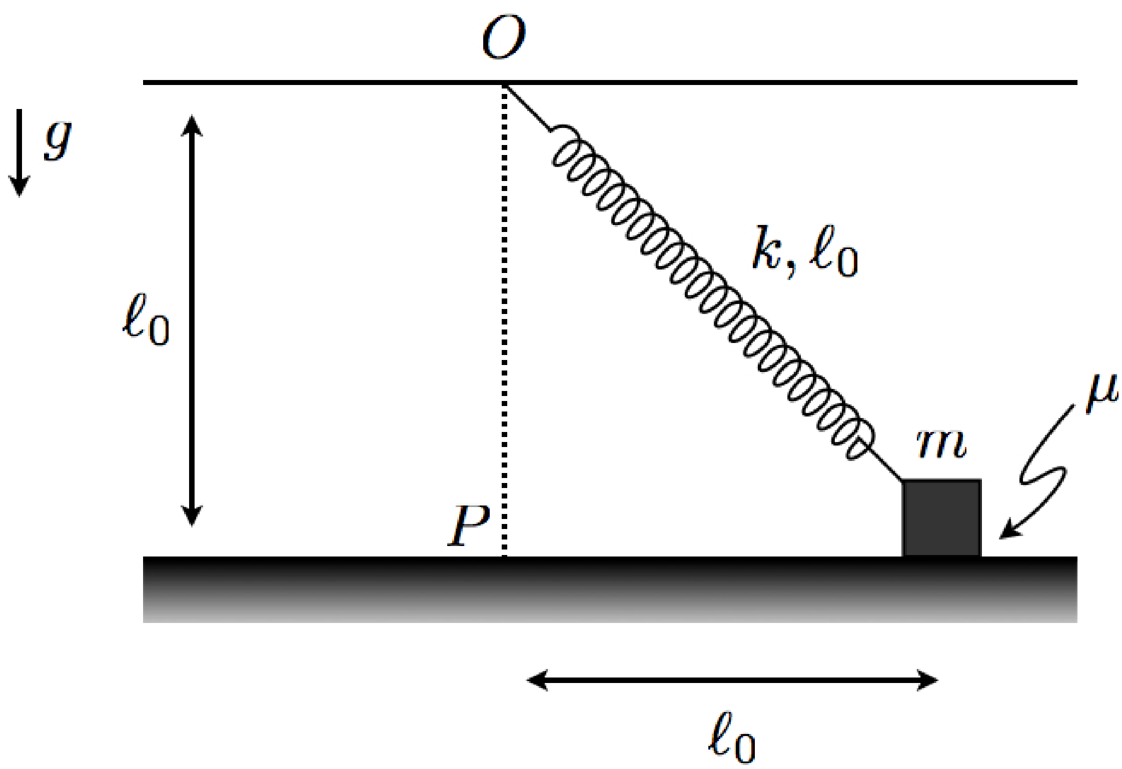


P2: Considere un bloque de masa m que se mueve por una superficie horizontal con la cual tiene un coeficiente de roce cinético μ desconocido. El bloque está unido a un resorte de constante elástica k y largo natural ℓ_0, cuyo otro extremo está unido a un punto fijo O ubicado a una altura ℓ_0 de la superficie horizontal. En $t = 0$ el bloque se suelta desde el reposo a una distancia ℓ_0 a la derecha del punto P correspondiente a la proyección vertical de O sobre la superficie (ver figura). Determine:

(a) La condición entre m, g, k y ℓ_0 tal que el bloque no se separe del piso en su movimiento.

(b) Si el bloque se vuelve a detener a una distancia $\ell_0/2$ a la izquierda de P, determine el valor de μ en función de m, k, ℓ_0 y g. Suponga que se satisface la condición de (a).

(c) Indique el trabajo realizado por cada una de las fuerzas presentes en el problema entre la condición inicial y el instante en que el bloque pasa por el punto P.

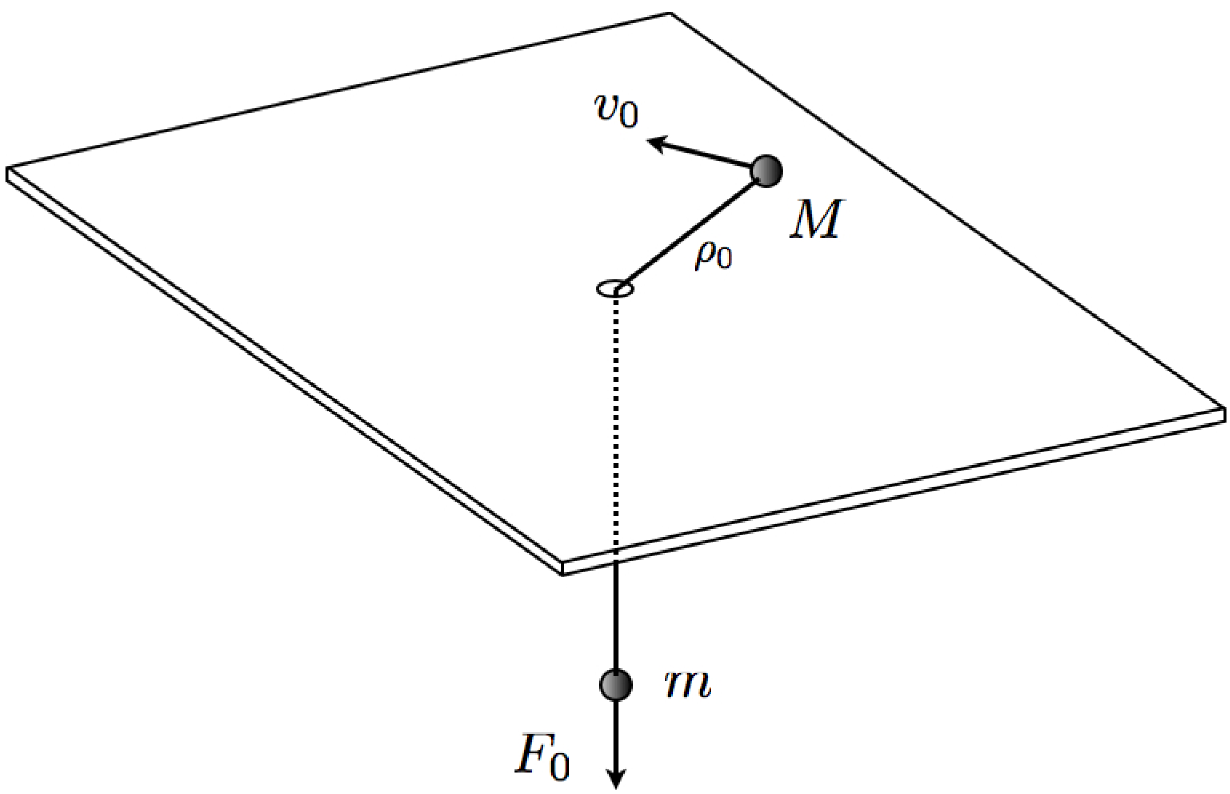


P3: Considere un sistema de dos partículas de masa M y m, unidas entre si por una cuerda inextensible que desliza sin roce por un agujero en una superficie horizontal, como se muestra en la figura. Inicialmente la partícula M se encuentra a una distancia ρ_0 del agujero.

(a) Determine la rapidez v_0 que hay que dar a la partícula de masa M en dirección perpendicular a la cuerda para que quede girando en un círculo de radio ρ_0.

(b) A partir de un cierto instante, en las condiciones especificadas en (a) se ejerce una fuerza F_0 de magnitud variable en el tiempo sobre la partícula que está colgando, de modo que ésta se mueve hacia abajo con una rapidez v_1 constante. Determine el número de vueltas que habrá dado la partícula M hasta que su distancia al agujero haya disminuido a la mitad.

(c) Determine la magnitud de F_0 en ese instante.



FI-2001 Mecánica - Sección-4
Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Sergio Godoy y Francisco Parra
FCFM, Universidad de Chile

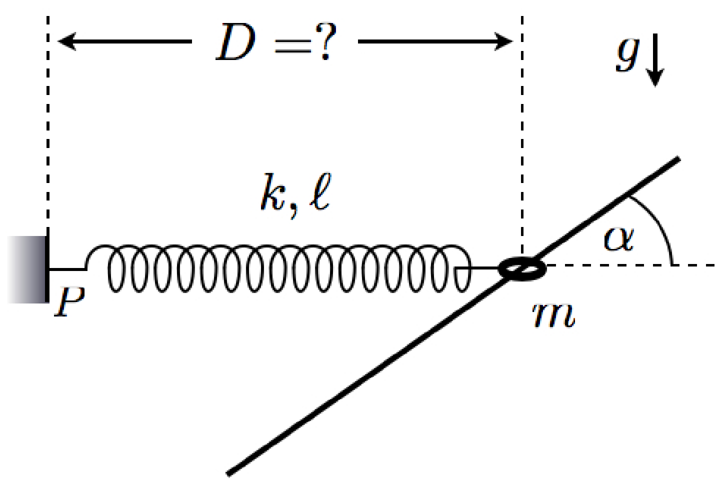
Control 3

Miércoles 23 de Junio, 2010 - Tiempo: 2h y 30m

P1: El anillo de masa m de la figura puede deslizar sin roce por una barra inclinada formando un ángulo α con respecto a la horizontal. El anillo está ligado a un punto fijo P mediante un resorte ideal de largo natural ℓ y constante elástica k. Se pide:

(a) (2 puntos) Determinar la distancia D para que la posición con el resorte horizontal corresponda a un punto de equilibrio del sistema (ver figura).

(b) (4 puntos) Si se cumple que $\alpha = 30^o$ y $k\ell = mg$, determine el tipo de estabilidad del equilibrio de la parte (a). Si fuese estable, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a él. Si fuese inestable, indique si espera que existan equilibrios adicionales.



P2: Considere una nave espacial de masa m que se acerca a la Luna en una órbita parabólica (a la Luna se le conoce su masa M y radio R). En el momento que está pasando por el punto más cercano a la Luna, a una distancia R de la superficie, los tripulantes deciden frenar bruscamente para dejar la nave en una órbita circular.

(a) Calcular la disminución de rapidez que experimenta la nave en el proceso de frenado.

Luego de orbitar la Luna por un cierto tiempo, los tripulantes deciden realizar otro frenado brusco con el objeto de poner la nave en una órbita elíptica que les permita acercarse hasta la superficie de la Luna, haciendo un vuelo rasante sobre ella.

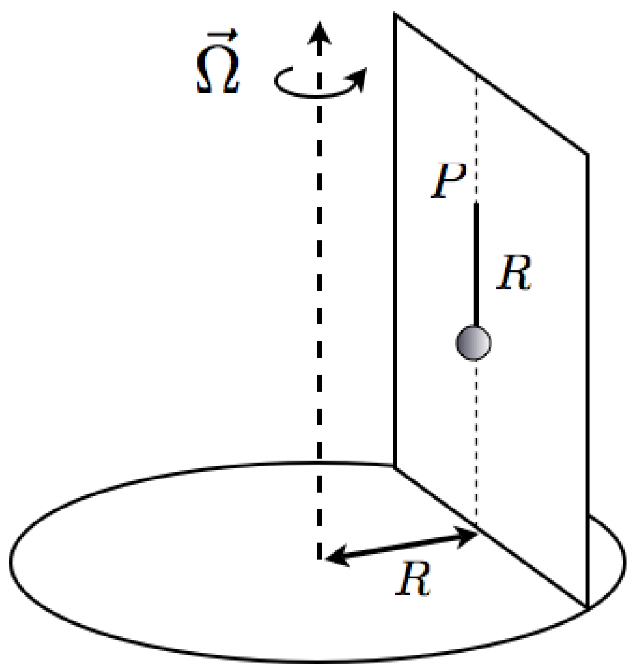
(b) Calcular la disminución de rapidez que experimenta la nave en este nuevo proceso de frenado, y su velocidad en el momento que pasa rozando la superficie de la Luna.

P3: En un ambiente **sin gravedad** se tiene una plataforma que gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante como se muestra en la figura. Sobre la plataforma, y a una distancia R de su eje de rotación, se encuentra una pared colocada en forma perpendicular a ella. Por la cara interior de la pared se tiene una partícula de masa m atada a un punto P fijo en la pared, mediante una cuerda de largo R. Inicialmente la partícula se encuentra en reposo relativo en el punto más cercano a la plataforma (ver figura). La cuerda está extendida, pero sin tensión.

(a) A partir de la posición descrita, se perturba ligeramente a la partícula en dirección indicada por la flecha, sacándola de su posición de equilibrio inestable inicial. Calcule la máxima rapidez relativa a la pared que alcanza la partícula.

(b) Muestre que en el movimiento resultante de la parte (a), la fuerza normal $\vec{N}$ que la pared le ejerce sobre la partícula siempre apunta hacia el centro de giro (y no alejándose de él) y que la tensión $\vec{T}$ de la cuerda es tal qué ésta se mantiene tensa.

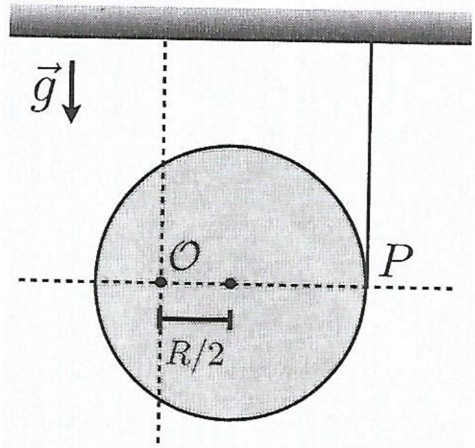
(c) Indique todas las posiciones en que la partícula puede permanecer en equilibrio relativo, estando la cuerda estirada. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones en torno a la(s) posición(es) de equilibrio estable.



$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\,\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$$

FI-2001 Mecánica - Sección-6
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Jonathan Monsalve & Fabián Sepúlveda
FCFM, Universidad de Chile

Examen
Martes 18 de agosto, 2015
Tiempo: 3horas



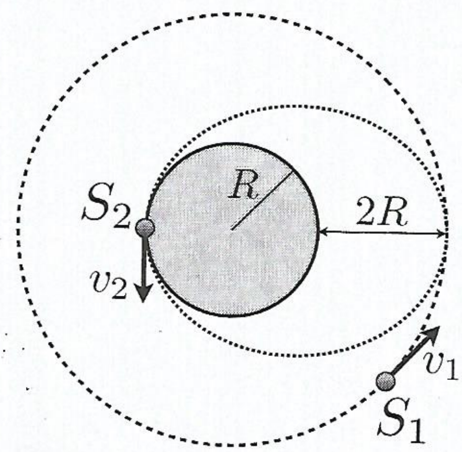
P1: Considere un disco de radio R y masa M (homogéneamente distribuida) colocado en forma vertical. El sistema puede girar con roce despreciable alrededor de un eje $\mathcal{O}$ horizontal que pasa a una distancia $R/2$ del centro del disco. Inicialmente, el disco se encuentra en reposo, sujeto a una cuerda fija al punto P (ver figura).

(a) **(1.5)** Calcule el tensor de inercia del disco con respecto al punto $\mathcal{O}$ por donde pasa el eje horizontal.

(b) **(1.5)** Calcule la tensión de la cuerda.

(c) **(1.5)** Si en un momento se corta la cuerda calcule el cambio en la magnitud de la fuerza que el eje $\mathcal{O}$ ejerce sobre el disco.

(d) **(1.5)** Determine la velocidad angular máxima del disco.

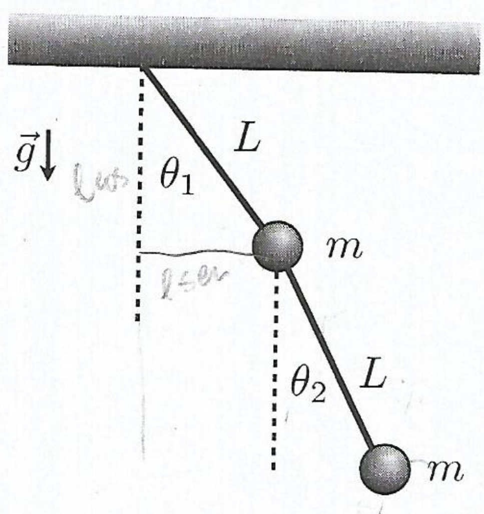


P2: Considere un satélite S_1 de masa m que se encuentra girando en órbita circular alrededor de la Tierra (radio R), a una distancia $2R$ de la superficie. Desde la superficie de la Tierra se lanza otro satélite S_2, también de masa m, en dirección paralela a la superficie, de modo que choca con el satélite en órbita S_2 circular en la posición indicada en la figura, quedando ambos satélites pegados luego del impacto.

(a) **(2.0)** Calcule la rapidez v_1 a la cual se mueve el satélite S_1 antes del impacto.

(b) **(2.0)** Calcule la rapidez v_2 de lanzamiento del satélite S_2.

(c) **(2.0)** Como resultado del choque los dos satélites quedan juntos. Determine la velocidad de la "chatarra" resultante luego del impacto.



P3: Desde un péndulo de masa m y largo L se sujeta otro péndulo exactamente igual de modo que ambos pueden oscilar libremente en el plano vertical (ver figura). Si sus oscilaciones se describen respecto a los ángulos que cada péndulo forma con la vertical, θ_1 y θ_2:

(a) **(1.5)** Encuentre el Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas θ_1 y θ_2, y velocidades $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$.

(b) **(1.5)** Determine la forma apropiada del Lagrangiano para describir pequeñas oscilaciones en torno a la configuración de equilibrio del sistema.

(c) **(1.5)** Deduzca el sistema de ecuaciones de movimiento acopladas para θ_1 y θ_2. A partir de estas, deduzca la matriz de frecuencias.

(d) **(1.5)** Determine las frecuencias propias del sistema y los modos normales asociados a éstas (incluya un bosquejo de los modos encontrados).