

Mecánica FI2001-1

Control 2: Miércoles 16 de junio, 2021

Prof. Gonzalo A. Palma.

Aux's: Martín Bataille, Gabriel Marín & Nicolás Parra.

Instrucciones: Escriba su nombre y RUT en todas las hojas que entregue. ESTE CONTROL ES INDIVIDUAL. No comente con otras personas los temas o contenidos del control. Ud. no debe recibir ayuda. Ud. no debe otorgar ayuda. Puede consultar la literatura según lo considere pertinente. Esto incluye sus apuntes personales y los apuntes de clase, pero NO incluye apuntes de otras personas. Escriba en su hoja de soluciones la literatura consultada (libros, apuntes propios, problemas resueltos, páginas de internet, etc.). Las respuestas a las preguntas deben ser manuscritas de su propio puño y letra. Escriba claramente: no habrá evaluación si la caligrafía no se entiende. No se aceptarán respuestas escritas en un computador. **POR FAVOR:** SUBA SUS RESPUESTAS EN UN ARCHIVO PDF.

Sobre este control: A continuación se enuncian 2 problemas que repasan distintos aspectos de la materia cubierta. Cada uno de ellos puede ser resuelto de distintas maneras. Usted es libre de escoger el método para enfrentar cada problema. Desarrolle cada problema con el mayor detalle posible, sin saltarse pasos, y justificando claramente cada paso. Si en un problema dado usted no puede avanzar con un cálculo específico, se sugiere que explique cómo proceder, aún sin contar con expresiones analíticas concretas.

P1: Una partícula de masa m confinada al plano cartesiano (x, y) permanece bajo la influencia de una única fuerza $\vec{F}(x, y)$. Como consecuencia de esta fuerza, la partícula mantiene un movimiento con la siguiente dependencia temporal:

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t), \quad y(t) = A_y \sin(\omega_y t), \quad (1)$$

donde A_x , A_y , ω_x y ω_y son parámetros constantes.

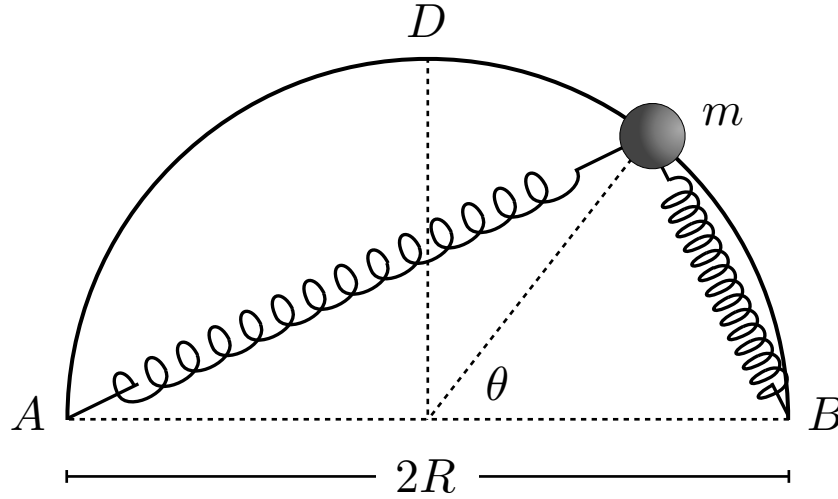
(a) Encuentre la forma explícita de $\vec{F}(x, y)$ en términos de las coordenadas x e y de la partícula. ¿Qué condición deben cumplir los parámetros para que $\vec{F}(x, y)$ sea una fuerza central?

Para el caso general en el cual la fuerza no es necesariamente central:

(b) Determine la energía potencial $U(x, y)$ asociada a $\vec{F}(x, y)$ en función de las coordenadas x, y .

(c) Calcule la energía cinética de la partícula en función del tiempo y muestre que la energía mecánica total de la partícula se conserva en el tiempo.

P2: Una cuenta de masa m puede deslizarse por un aro semi-circunferencial de radio R . La cuenta permanece unida a los extremos A y B del aro mediante resortes idénticos de constante elástica k y largo natural $R/2$ (ver figura). Desprecie tanto la fuerza de gravedad como la presencia de posibles fuerzas de roce. Además, suponga que es posible reducir el largo de los resortes a 0.



- (a) Determine las configuraciones de equilibrio del sistema (estables e inestables).
- (b) Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a aquellos puntos de equilibrio estable.
- (c) Determine la rapidez v_0 que debe tener la cuenta en el punto medio D de modo que alcance a llegar a B con rapidez $v_0/2$.
- (d) Para la situación descrita en (c), determine la fuerza que el aro ejerce sobre la cuenta en el instante que ella pasa por el punto $\theta = 60^\circ$.

Mecánica FI2001-1
Examen: Sábado 17 de julio, 2021

Prof. Gonzalo A. Palma.

Aux's: Martín Bataille, Gabriel Marín & Nicolás Parra.

Instrucciones: Escriba su nombre y RUT en todas las hojas que entregue. ESTE CONTROL ES INDIVIDUAL. No comente con otras personas los temas o contenidos del control. Ud. no debe recibir ayuda. Ud. no debe otorgar ayuda. Puede consultar la literatura según lo considere pertinente. Esto incluye sus apuntes personales y los apuntes de clase, pero NO incluye apuntes de otras personas. Escriba en su hoja de soluciones la literatura consultada (libros, apuntes propios, problemas resueltos, páginas de internet, etc.). Las respuestas a las preguntas deben ser manuscritas de su propio puño y letra. Escriba claramente: no habrá evaluación si la caligrafía no se entiende. No se aceptarán respuestas escritas en un computador. **POR FAVOR:** SUBA SUS RESPUESTAS EN UN ARCHIVO PDF.

Sobre este examen: A continuación se enuncian 2 problemas que repasan distintos aspectos de la materia cubierta. Cada uno de ellos puede ser resuelto de distintas maneras. Usted es libre de escoger el método para enfrentar cada problema. Desarrolle cada problema con el mayor detalle posible, sin saltarse pasos, y justificando claramente cada paso. Si en un problema dado usted no puede avanzar con un cálculo específico, se sugiere que explique cómo proceder, aún sin contar con expresiones analíticas concretas.

P1: Considere el problema de lanzar una esfera rodando sin resbalar por el techo de una casa como ilustra la Figura 1. Si la rapidez inicial de la esfera es muy pequeña, puede que no logre pasar al otro lado de la pendiente. Si es muy grande, puede que la esfera se separe en el punto O ubicado en la cúspide del techo. El propósito de este problema es encontrar las condiciones para que la esfera llegue a O , gire en torno a O , y siga su recorrido por la pendiente del otro lado sin nunca separarse de la superficie.

Fig. 1

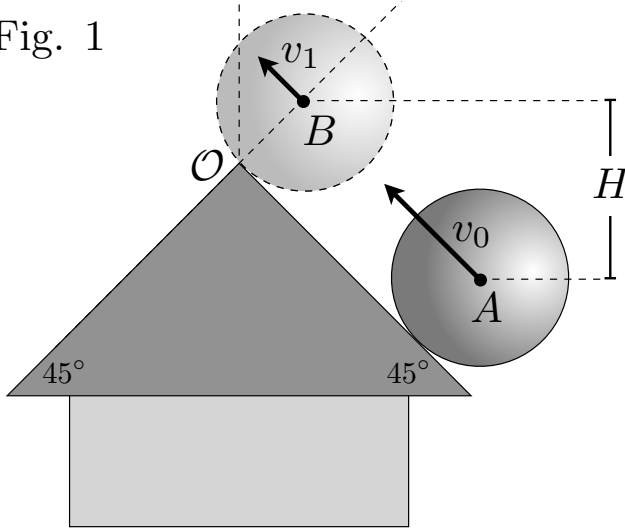
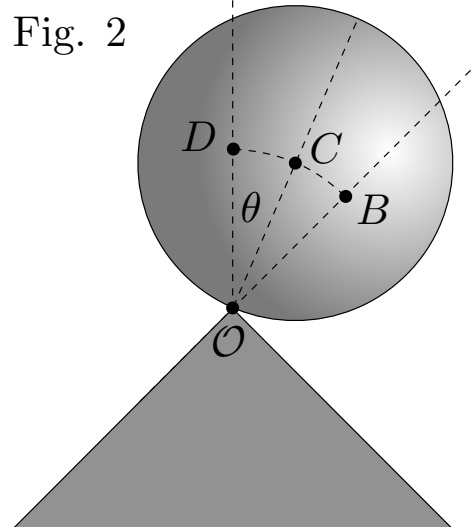


Fig. 2



(a) Determine la rapidez v_0 que debe tener el centro C de la esfera en su posición inicial A tal que llegue con rapidez v_1 a la posición B marcada con línea segmentada (Figura 1), considerando que entre las posiciones A y B el centro asciende una altura H .

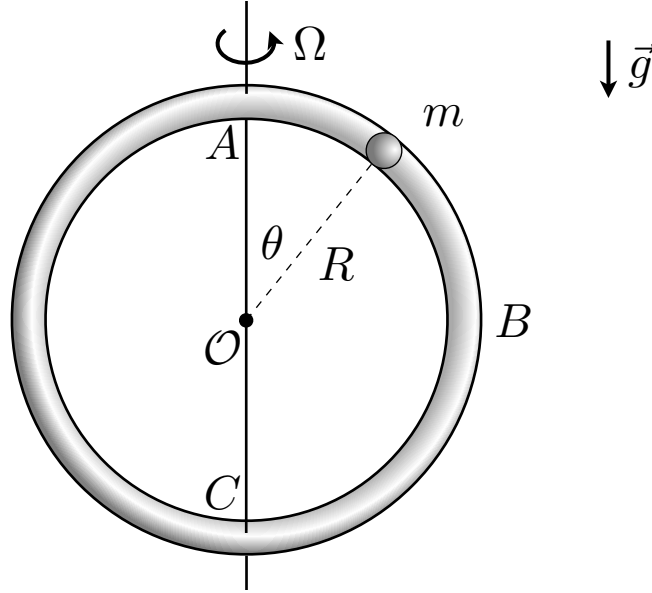
(b) Condición 1: Determine el valor mínimo para la rapidez v_1 del centro C en la posición B , tal que el centro de la esfera logre alcanzar el punto D ($\theta = 0$), suponiendo que ella no se separa del punto O (ver Figura 2).

(c) Condición 2: Determine el valor máximo de la rapidez v_1 del centro C en la posición B , tal que la esfera no se separe del punto O mientras C gira en torno a O para pasar al otro lado.

Indicaciones: Esfera homogénea de masa M y radio R . Inclinação de pendientes: 45° . Suponga que no hay resbalamiento en ningún momento. Momento de inercia de la esfera con respecto a su centro: $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Videos: Se proveerán 2 enlaces a videos subidos en YouTube que podrían ayudarle a visualizar el movimiento de la esfera. Los videos son sólo referencias cualitativas y lo que en ellos se ve NO puede ser usado como argumento en sus respuestas.

P2: Una partícula de masa m se puede mover libremente, sin roce, por el interior de un tubo circular de radio R y masa M , que puede girar en torno al eje vertical (ver figura). Consideraremos 2 casos: Caso I: Tubo en reposo ($\Omega = 0$); Caso II: Tubo forzado a girar con velocidad angular constante $\Omega = \omega_0$. En ambos casos la partícula está inicialmente en reposo en el punto más alto del tubo (punto A), y experimenta una pequeña perturbación que la saca del equilibrio poniéndola en movimiento.



(a) Para el caso I, calcule la rapidez absoluta de la partícula cuando llega al punto más bajo (punto C donde $\theta = \pi$). Para el caso II, evalúe si la partícula llega al punto más bajo, y si eso ocurre cuál es su rapidez absoluta en ese punto. ¿Para cuál caso la rapidez es mayor?

(b) Respecto del instante cuando la partícula pasa por el punto B ($\theta = \pi/2$), indique si la rapidez relativa de la partícula con respecto al tubo es mayor, igual o menor en el caso I comparada con el caso II. Puede contestar con un buen argumento físico o haciendo los cálculos correspondientes.

(c) Encuentre para cada caso una expresión para la magnitud de la fuerza que la pared del tubo ejerce sobre la partícula en función del ángulo θ , a medida que la partícula se desplaza por el interior del tubo.

(d) Por último, considere el caso en que el tubo (que tiene masa M) puede girar libremente, sin roce, en torno al eje vertical, con rapidez angular inicial $\Omega_{\text{ini}} = \omega_0$. Argumente, utilizando conceptos físicos, qué ocurre con su velocidad angular de rotación Ω , a medida que la partícula se desplaza entre los puntos A y C .

Mecánica FI2001-1

Tarea 4: Martes 1 de junio, 2021

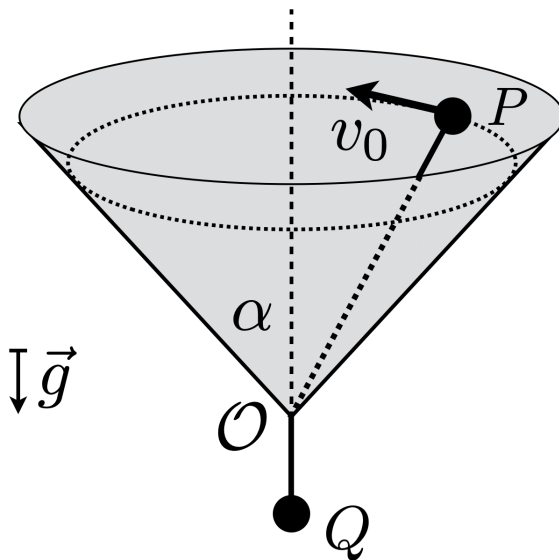
Fecha de entrega: Viernes 18 de junio

Prof. Gonzalo A. Palma.

Aux's: Martín Bataille, Gabriel Marín & Nicolás Parra.

P1: Una partícula P de masa m se mueve sobre la superficie interior de un cono con un ángulo de abertura α . Otra partícula Q de masa m , cuelga desde un orificio en el vértice del cono, y permanece unida a P por una cuerda de largo L_0 .

- (a) Obtenga una ecuación de movimiento para la distancia r entre P y el origen $\mathcal{O}$.
- (b) Si la partícula P se mueve en una trayectoria circular con rapidez v_0 constante, determine el valor del radio r_0 del círculo definido por la trayectoria.
- (c) Considere desplazamientos radiales $x = r - r_0$ en torno a la configuración de la parte anterior. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales ($|x| \ll r_0$) que experimenta P si en un cierto instante se le da un pequeño impulso en la dirección radial.

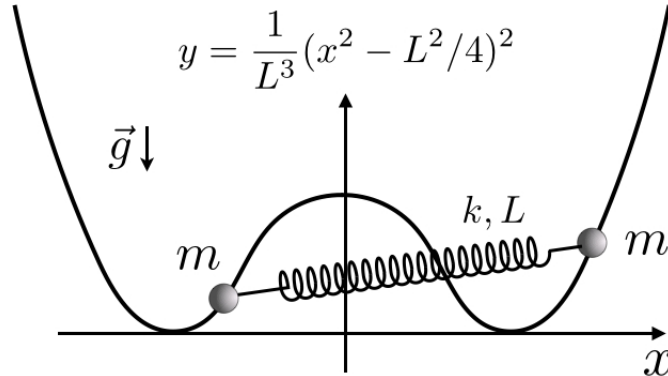


P2: Dos partículas de masa m están confinadas a moverse a lo largo de un alambre curvo descrito por la ecuación $y(x) = (x^2 - L^2/4)^2/L^3$. Estas permanecen comunicadas por medio de un resorte de largo natural L y constante elástica k , tal como lo muestra la figura. Se cumple que $m = kL/3g$.

(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de pequeñas oscilaciones, en torno a los puntos de equilibrio $x_{\pm} = \pm L/2$.

(b) Determine los modos normales, junto con sus frecuencias. Bosqueje el movimiento del sistema representado por cada modo normal.

(c) Si en tiempo $t = 0$ la primera partícula está en reposo en $x_1 = -L/2$ y la segunda cumple $\dot{x}_2 = v_0$ en $x_2 = +L/2$, determine el tiempo T mínimo que le toma al sistema llegar a una configuración donde la segunda partícula se detiene en $x_2 = L/2$, mientras que la primera partícula oscila en torno a $x_1 = -L/2$.



Mecánica FI2001-1

Tarea 5: Jueves 24 de junio, 2021

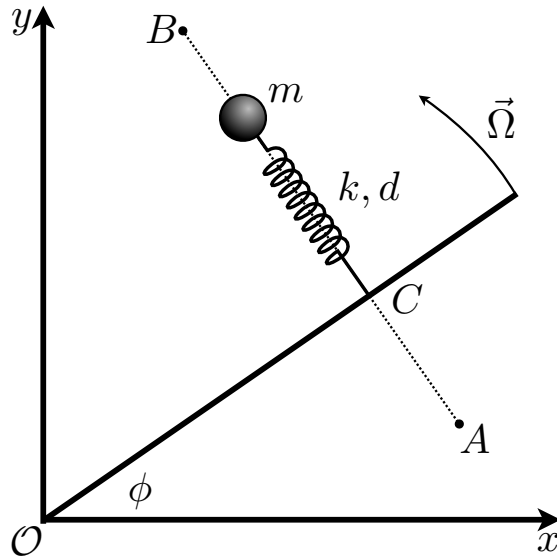
Fecha de entrega: Viernes 9 de julio

Prof. Gonzalo A. Palma.

Aux's: Martín Bataille, Gabriel Marín & Nicolás Parra.

P1: Una partícula P de masa m está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural d . La partícula desliza sin roce a lo largo de un riel AB , perpendicular a la recta OC de largo L que pasa por el origen. Tanto OC como AB rotan con velocidad angular uniforme $\Omega \hat{k}$ como lo indica la figura. Elija un sistema de referencia no inercial S' tal que OC se extienda a lo largo del eje x' , para obtener el movimiento de la partícula P .

- (a) Dé una expresión a cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula en el sistema no inercial (esto incluye las fuerzas típicas de estos sistemas de referencia).
- (b) Distinga qué tipo de movimiento tiene la partícula dependiendo del valor de $k/m - \Omega^2$.
- (c) Si $k/m - \Omega^2$ es positivo, ¿Cuál es la posición de equilibrio de la partícula?
- (d) Determine la fuerza que ejerce la barra AB sobre la partícula en el plano horizontal.
- (e) Si la partícula inicialmente tiene velocidad nula con respecto a la barra AB y a una distancia ϵ del punto de equilibrio (de modo que el resorte está estirado), determine la posición de la partícula en función de la velocidad en el sistema no inercial.



Indicación: Le podría resultar útil recordar la fórmula:

$$m \vec{a}' = \vec{F}_{\text{tot}} - m \ddot{\vec{R}} - m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m \vec{\Omega} \times \vec{v}' - m \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'.$$

P2: Considere una barra homogénea de largo L y masa M . Inicialmente, la barra está en reposo, orientada de forma vertical, con uno de sus extremos apoyado sobre el suelo. Un pequeño impulso hace que la barra empiece a girar sin resbalar sobre su punto de apoyo (ver figura). Determine el ángulo para el cual la barra se despega del suelo.

