

Mecánica FI2001-5

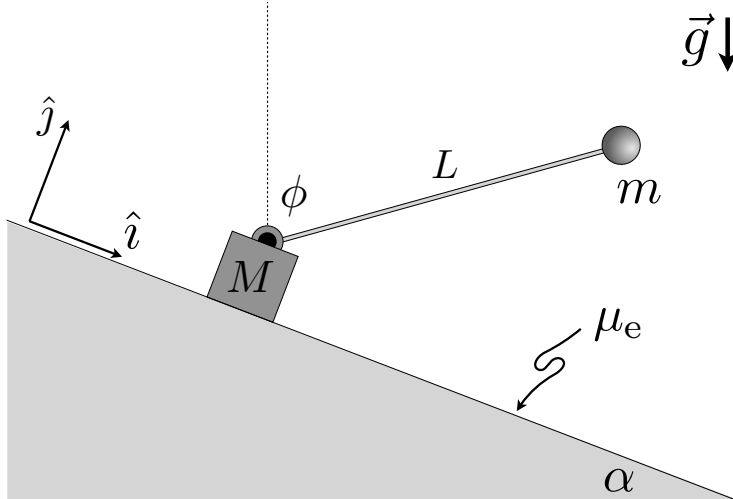
Control: Miércoles 8 de julio, 2020

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y Bernardita Ried.

Instrucciones: Escriba su nombre y RUT en todas las hojas que entregue. ESTE CONTROL ES INDIVIDUAL. No comente con otras personas los temas o contenidos del control. Ud. no debe recibir ayuda. Ud. no debe otorgar ayuda. Puede consultar la literatura según lo considere pertinente. Esto incluye sus apuntes personales y los apuntes de clase, pero NO incluye apuntes de otras personas. Escriba en su hoja de soluciones la literatura consultada (libros, apuntes propios, problemas resueltos, páginas de internet, etc.). Las respuestas a las preguntas deben ser manuscritas de su propio puño y letra. Escriba claramente: no habrá evaluación si la caligrafía no se entiende. No se aceptarán respuestas escritas en un computador.

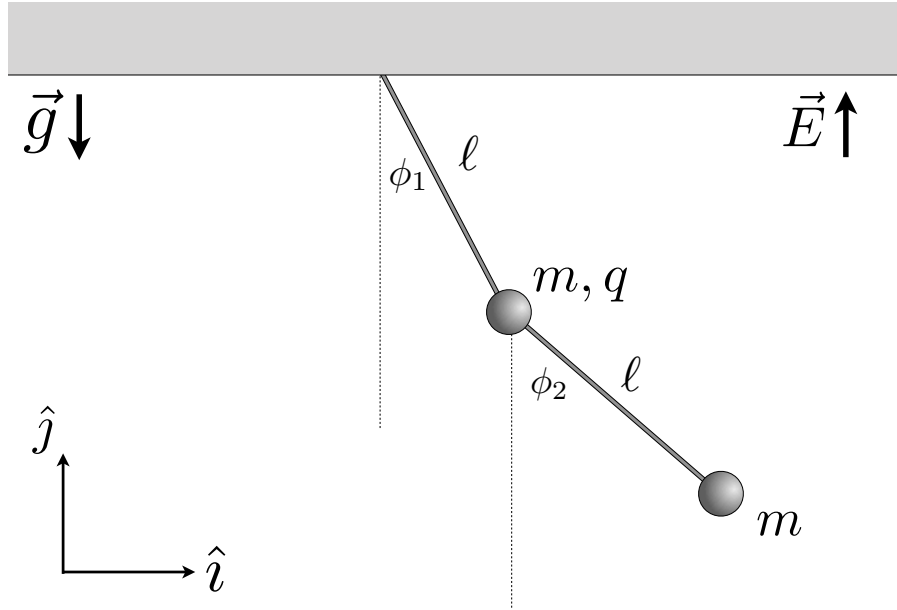
Sobre este control: A continuación se enuncian 2 problemas que repasan distintos aspectos de la materia cubierta. Cada uno de ellos puede ser resuelto de distintas maneras. Usted es libre de escoger el método para enfrentar cada problema. Desarrolle cada problema con el mayor detalle posible, sin saltarse pasos, y justificando claramente cada paso. Si en un problema dado usted no puede avanzar con un cálculo específico, se sugiere que explique cómo proceder, aún sin contar con expresiones analíticas concretas.

P1 - Dinámica: Considere una masa m unida a un bloque de masa M a través de una varilla rígida de largo L y masa despreciable. La varilla puede girar libremente en torno a una bisagra sobre el bloque. El bloque descansa, sin moverse, sobre un plano inclinado en un ángulo α (ver figura). Entre el plano y el bloque existe una fuerza de roce estática con coeficiente de roce μ_e . Inicialmente, la varilla se encuentra en la posición vertical ($\phi = 0$), en reposo ($\dot{\phi} = 0$), y un pequeño impulso hace que comience a moverse hacia la derecha. Asuma que el bloque M permanece en reposo durante todo el tiempo.



Encuentre expresiones para los módulos de la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de roce estática $\vec{F}_e$, que el plano ejerce sobre el bloque, en términos ϕ y los parámetros m , M , g y α .

P2 - Pequeñas oscilaciones: Considere un péndulo de largo ℓ y masa m que pende de otro péndulo idéntico, de igual largo e igual masa (ver figura). La masa del péndulo superior tiene una carga positiva q . Aparte del campo gravitacional, en este sistema existe un campo eléctrico $\vec{E} = E_0 \hat{j}$ donde E_0 es una constante positiva. Dicho campo ejerce una fuerza $\vec{F}_q = q\vec{E}$ sobre la carga.



- (a) Derive el sistema de ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones en torno a $\phi_1 = \phi_2 = 0$.
- (b) Para el caso $qE_0 = mg$, determine las frecuencias y modos normales del sistema. Bosqueje los modos normales. (Puede usar $\sqrt{5} \simeq 2.2$).

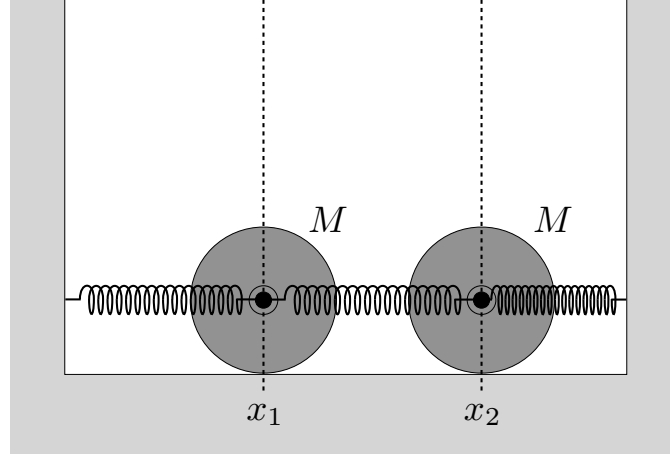
Mecánica FI2001-5
Examen: Martes 4 de agosto, 2020

**Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y
Bernardita Ried.**

Instrucciones: Escriba su nombre y RUT en todas las hojas que entregue. ESTE EXAMEN ES INDIVIDUAL. No comente con otras personas los temas o contenidos del control. Ud. no debe recibir ayuda. Ud. no debe otorgar ayuda. Puede consultar la literatura según lo considere pertinente. Esto incluye sus apuntes personales y los apuntes de clase, pero NO incluye apuntes de otras personas. Escriba en su hoja de soluciones la literatura consultada (libros, apuntes propios, problemas resueltos, páginas de internet, etc.). Las respuestas a las preguntas deben ser manuscritas de su propio puño y letra. Escriba claramente: no habrá evaluación si la caligrafía no se entiende. No se aceptarán respuestas escritas en un computador.

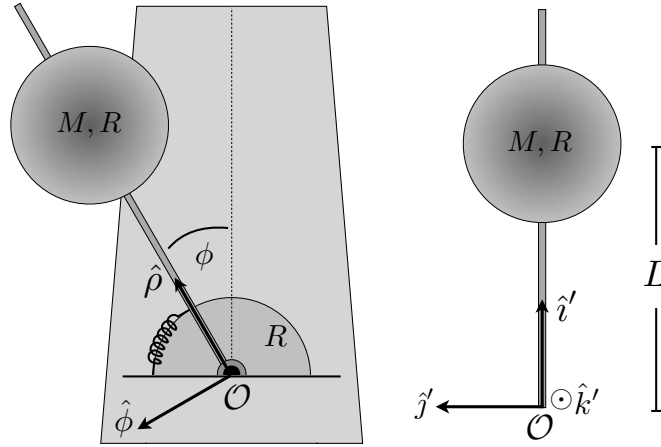
Sobre este examen: A continuación se enuncian 2 problemas que repasan distintos aspectos de la materia cubierta. Cada uno de ellos puede ser resuelto de distintas maneras. Usted es libre de escoger el método para enfrentar cada problema. Desarrolle cada problema con el mayor detalle posible, sin saltarse pasos, y justificando claramente cada paso. Si en un problema dado usted no puede avanzar con un cálculo específico, se sugiere que explique cómo proceder, aún sin contar con expresiones analíticas concretas.

P1: Dos discos de radio R y masa M ruedan sin resbalar sobre una superficie horizontal, en el interior de una caja de largo $3D$ (con $D \gg R$). Los ejes de los discos permanecen conectados entre sí y las paredes mediante resortes de largo natural D y constante elástica k (ver figura). Para describir la configuración del sistema, considere las posiciones x_1 y x_2 del centro de masas de los discos a lo largo del eje x . Cada disco tiene una distribución de masa superficial dada por $\sigma(r) = \frac{6M}{\pi R^4}(Rr - r^2)$, donde r es la distancia al centro del disco.



- (a) Encuentre expresiones para las velocidades angulares $\vec{\Omega}_1$ y $\vec{\Omega}_2$ de cada disco como función de $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$, respectivamente.
- (b) Encuentre una expresión para la energía cinética de cada disco como función de $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$, respectivamente.
- (c) Determine las ecuaciones de movimiento para los discos.
- (d) Encuentre las frecuencias normales del sistema, e ilustre los modos de oscilación correspondiente para cada frecuencia.

P2: Considere un metrónomo consistente en un disco de masa M y radio R adherido a una varilla de masa despreciable. El extremo inferior de la varilla puede girar sin fricción en torno a un eje ubicado en el origen $\mathcal{O}$ (ver figura). Otro disco de radio R , centrado en el origen, mantiene un resorte circunscrito a su borde, con un extremo conectado a la varilla, y otro a la base del metrónomo. El resorte tiene constante elástica k y largo natural $R\pi/2$. La distancia L del centro de masas del disco al origen puede ser ajustada para conseguir que el metrónomo oscile con el periodo deseado. El disco tiene una densidad de masa superficial dada por $\sigma(r) = \frac{2M}{\pi R^4}(R^2 - r^2)$, donde r es la distancia al centro del disco. Puede despreciar la fuerza de gravedad.



- (a) Calcule la matriz de inercia del péndulo del metrónomo respecto al origen $\mathcal{O}$. Exprese la matriz en términos de la base cartesiana $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ de la figura.
- (b) Determine la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ (recuerde despreciar la gravedad).
- (c) Si el metrónomo se activa en $t = 0$ con $\phi = \phi_0$ y $\dot{\phi} = 0$, determine la fuerza $\vec{F}_{\text{eje}}$ que el eje ejerce sobre la varilla como función de ϕ . ¿Es posible ajustar la distancia L del disco de modo que $\vec{F}_{\text{eje}} \cdot \hat{\phi} = 0$ siempre?

Pauta P1: (a) Los puntos de equilibrio del sistema son $x_1^0 = D$ y $x_2^0 = 2D$. Notemos que $R\phi_1 = D - x_1$ y $R\phi_2 = 2D - x_2$ donde ϕ_1 y ϕ_2 son los ángulos en que gira cada disco fuera del equilibrio. Luego, $\dot{\phi}_1 = -\dot{x}_1/R$ y $\dot{\phi}_2 = -\dot{x}_2/R$. Entonces, las velocidades angulares son $\vec{\Omega}_1 = -\dot{x}_1\hat{k}/R$ y $\vec{\Omega}_2 = -\dot{x}_2\hat{k}/R$, donde $\hat{k}$ apunta hacia fuera del plano del dibujo (el signo importa). (b) Recordemos que la energía cinética de un sólido rígido puede ser escrita como $K = \frac{M}{2}\vec{v}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t I_{\text{CM}} \vec{\Omega}$. Dado que $\vec{\Omega}_i = -\dot{x}_i\hat{k}/R$, tenemos $K_i = \frac{M}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{\dot{x}_i^2}{2R^2}I_{zz}^{\text{CM}}$. Entonces solo nos interesa la componente I_{zz}^{CM} de la matriz de inercia de los discos con respecto a sus centros de masas. Esta es:

$$I_{zz}^{\text{CM}} = \int (x^2 + y^2)dm = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \frac{6M}{\pi R^4} r(r-R) r dr d\theta = 2\pi \frac{6M}{\pi R^4} \int_0^R r^4 (R-r) dr = \frac{2}{5}MR^2$$

Reemplazando, finalmente obtenemos $K_i = \frac{7}{10}M\dot{x}_i^2$. (c) La energía potencial del sistema es $U = \frac{k}{2}(x_1 - D)^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - D)^2 + \frac{k}{2}(x_2 - 2D)^2$. Luego, el Lagrangiano del sistema es $L = \frac{7}{10}M\dot{x}_1^2 + \frac{7}{10}M\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}(x_1 - D)^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - D)^2 - \frac{k}{2}(x_2 - 2D)^2$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\delta\ddot{x}_1 + \frac{5k}{7M}(2\delta x_1 - \delta x_2) = 0, \quad \delta\ddot{x}_2 + \frac{5k}{7M}(2\delta x_2 - \delta x_1) = 0,$$

donde definimos $\delta x_1 = x_1 - D$ y $\delta x_2 = x_2 - 2D$ (los desplazamiento fuera del equilibrio).

(d) La matriz de frecuencias es $\Omega^2 = \frac{5k}{7M} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculando los valores propios,

es directo ver que las frecuencias son $\omega_1 = \sqrt{15k/7M}$ y $\omega_2 = \sqrt{5k/7M}$. Los vectores propios son $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ (normalizar es opcional). A partir de éstos, los modos de oscilación pueden ser dibujados fácilmente.

Alternativa: Por cierto, otra forma (más larga) de derivar las ecuaciones de movimiento en la parte (c) es mediante la segunda ley de Newton y torque: Por ejemplo, la segunda ley de Newton para el primer disco es $M\ddot{x}_1\hat{i} = k(x_2 - x_1 - D)\hat{i} - k(x_1 - D)\hat{i} - Mg\hat{j} + \vec{F}_{\text{suelo},1}$ donde $\vec{F}_{\text{suelo},1} = \hat{i}F_{\text{re},1} + N\hat{j}$ es la fuerza que el suelo ejerce sobre el disco (claramente $N = Mg$). $\hat{i}F_{\text{re},1}$ es la fuerza de roce estático que el suelo ejerce sobre la rueda para que ésta no resbale. Para calcular $F_{\text{re},1}$ basta calcular el torque con respecto al centro de masas. Este es: $\vec{\tau}_{\text{CM}} = (-\hat{j}R) \times (F_{\text{re},1}\hat{i}) = RF_{\text{re},1}\hat{k}$. Luego, dado que el momento angular con respecto al centro de masas es $\vec{L}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\vec{\Omega} = \hat{k}\dot{\phi}I_{zz}^{\text{CM}} = -\hat{k}\frac{2}{5}MR\dot{x}_1$, obtenemos: $-\frac{2}{5}M\ddot{x}_1 = F_{\text{re},1}$. De regreso en la ecuación de movimiento, obtenemos $M\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - D) - k(x_1 - D) - \frac{2}{5}M\ddot{x}_1$, la que corresponde a la ecuación buscada (lo mismo se puede hacer para el segundo disco).

Pauta P2: (a) Teniendo en cuenta que el disco está confinado al plano $z' = 0$, la matriz de inercia I_{disco}^{CM} del disco en torno al centro de masas es

$$I_{\text{disco}}^{CM} = \int \begin{pmatrix} (y')^2 & -x'y' & 0 \\ -x'y' & (x')^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x')^2 + (y')^2 \end{pmatrix} dm = \frac{M}{6} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donde usamos $x' = \rho' \cos \phi'$, $y' = \rho' \sin \phi'$ y $dm = \sigma(\rho') \rho' d\rho' d\phi'$. Luego, usando el teorema de Steiner, tenemos que la matriz de inercia del disco con respecto a $\mathcal{O}$ es

$$I_{\text{disco}}^{\mathcal{O}} = \frac{M}{6} R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + ML^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} R^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 + R^2/6 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 + R^2/3 \end{pmatrix}.$$

(b) Una forma directa de obtener las ecuaciones de movimiento es calculando el Lagrangiano del sistema. La energía cinética para un sólido rígido con un punto fijo en $\mathcal{O}$ es $K = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t I_{\mathcal{O}} \vec{\Omega}$. Esto quiere decir que la energía cinética del péndulo del metrónomo es $K = \frac{1}{2} M (L^2 + R^2/3) \dot{\phi}^2$. Por otro lado, la energía potencial del resorte es $U(\phi) = \frac{k}{2} (\phi R)^2$. Luego, el Lagrangiano es $L = \frac{1}{2} M (L^2 + R^2/3) \dot{\phi}^2 - \frac{k}{2} (\phi R)^2$. Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es $\ddot{\phi} + \frac{k}{M} \frac{R^2}{L^2 + R^2/3} \phi = 0$. (c) Integrando la ecuación de movimiento, obtenemos $\dot{\phi}^2 + \frac{k}{M} \frac{R^2}{L^2 + R^2/3} \phi^2 = C$. Usando $\dot{\phi} = 0$ en ϕ_0 obtenemos $C = \frac{k}{M} \frac{R^2}{L^2 + R^2/3} \phi_0^2$ y por lo tanto $\dot{\phi}^2 = \frac{k}{M} \frac{R^2}{L^2 + R^2/3} (\phi_0^2 - \phi^2)$. También se cumple la ecuación $M \vec{a}_{\text{CM}} = \sum \vec{F}^{\text{ext}}$. Dado que $\vec{r}_{\text{CM}} = L \hat{\rho}$, tenemos $\vec{a}_{\text{CM}} = L(\ddot{\phi} \hat{\phi} - \dot{\phi}^2 \hat{\rho})$. Luego: $ML(\ddot{\phi} \hat{\phi} - \dot{\phi}^2 \hat{\rho}) = -kR\phi \hat{\phi} + \vec{F}_{\text{eje}}$. Dado que conocemos $\ddot{\phi}$ y $\dot{\phi}^2$ en función de ϕ , finalmente obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{eje}} = kR \left(1 - \frac{LR}{L^2 + R^2/3} \right) \phi \hat{\phi} - \frac{kLR^2}{L^2 + R^2/3} (\phi_0^2 - \phi^2) \hat{\rho}.$$

Para que $\vec{F}_{\text{eje}} \cdot \hat{\phi} = 0$ se debe cumplir $L^2 + R^2/3 - LR = 0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $L = R/2 \pm \sqrt{R^2/4 - R^2/3}$, lo cual da un número imaginario. Luego, no es posible.

Alternativa: Otra forma de derivar la ecuación de movimiento pedida en la parte (c) es calculando el momento angular del péndulo con respecto a $\mathcal{O}$. Este es $\vec{L}_{\mathcal{O}} = M(L^2 + R^2/3) \dot{\phi} \hat{k}$. El torque externo es debido al resorte: $\tau_{\mathcal{O}} = (R \hat{\rho}) \times (-kR\phi \hat{\phi}) = -kR^2 \phi \hat{k}$. Luego, a partir de $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$, obtenemos la misma ecuación de movimiento.

Mecánica FI2001-5

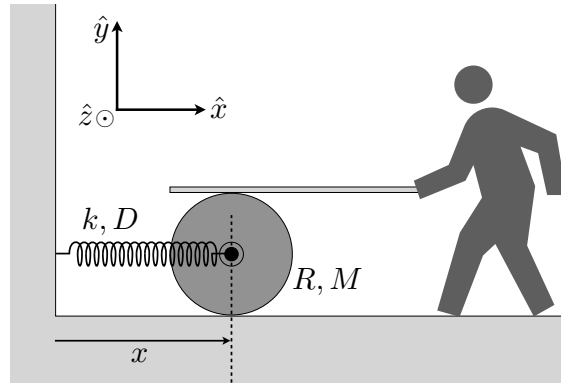
Examen 2: Viernes 14 de agosto, 2020

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y Bernardita Ried.

Instrucciones: Escriba su nombre y RUT en todas las hojas que entregue. ESTE EXAMEN ES INDIVIDUAL. No comente con otras personas los temas o contenidos del control. Ud. no debe recibir ayuda. Ud. no debe otorgar ayuda. Puede consultar la literatura según lo considere pertinente. Esto incluye sus apuntes personales y los apuntes de clase, pero NO incluye apuntes de otras personas. Escriba en su hoja de soluciones la literatura consultada (libros, apuntes propios, problemas resueltos, páginas de internet, etc.). Las respuestas a las preguntas deben ser manuscritas de su propio puño y letra. Escriba claramente: no habrá evaluación si la caligrafía no se entiende. No se aceptarán respuestas escritas en un computador.

Sobre este examen: A continuación se enuncian 2 problemas que repasan distintos aspectos de la materia cubierta. Cada uno de ellos puede ser resuelto de distintas maneras. Usted es libre de escoger el método para enfrentar cada problema. Desarrolle cada problema con el mayor detalle posible, sin saltarse pasos, y justificando claramente cada paso. Si en un problema dado usted no puede avanzar con un cálculo específico, se sugiere que explique cómo proceder, aún sin contar con expresiones analíticas concretas.

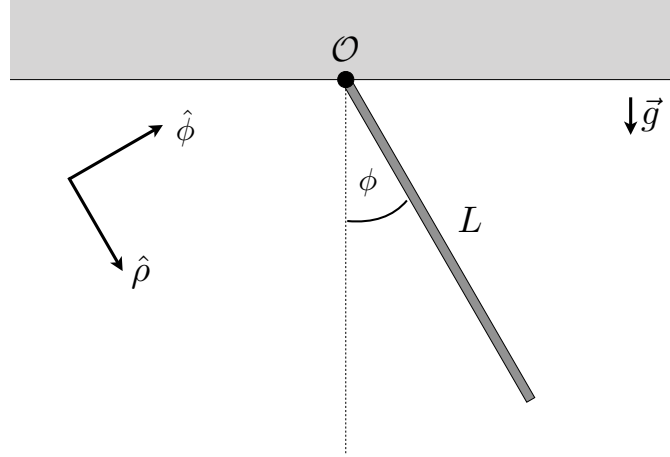
P1: Un disco homogéneo de radio R y masa M rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal. Un resorte de largo natural $D > R$ y constante elástica k conecta al centro del disco con una pared. Adicionalmente, una persona mantiene una tabla horizontal sobre el disco, de tal forma que la tabla puede transmitir una fuerza periódica $\vec{F} = F_0 \cos(\Omega_0 t) \hat{x}$ sobre el punto de contacto entre la tabla y el disco.



- (a) (1.0 pts) Calcule el momento angular del disco con respecto a su centro.
- (b) (2.0 pts) Haga un diagrama con las fuerzas que actúan sobre el disco, y determine una expresión para el torque total que actúa sobre el disco con respecto a su centro.
- (c) (2.0 pts) Encuentre la ecuación de movimiento para la posición x del centro del disco. ¿Cuál debe ser el valor de Ω_0 para que el disco entre en resonancia?
- (d) (1.0 pts) Suponga que $\Omega_0 = \sqrt{2k/M}$. Si en $t = 0$ se tiene $x = D - \frac{3F_0}{4k}$ y $\dot{x} = 0$, calcule la fuerza de roce estático $\vec{F}_e$ que el suelo ejerce sobre el disco (para todo t).

Indicación: En la parte (b) no se pide encontrar una expresión explícita para la fuerza de roce estático $\vec{F}_e$ que el suelo ejerce sobre el disco.

P2: Una barra *inhomogénea* de largo L y masa M puede girar libremente alrededor del origen $\mathcal{O}$ ubicado en uno de sus extremos (ver figura). La barra está sumergida en un medio viscoso. La viscosidad es tal que cada trocito de la barra de largo ds experimenta un coeficiente de roce $dc = \frac{6M}{L} \sqrt{\frac{g}{L}} ds$. Es decir, la fuerza de roce viscoso $d\vec{F}_v$ que afecta a un trocito de largo ds es $d\vec{F}_v = -dc \vec{v}$, con $dc = \frac{6M}{L} \sqrt{\frac{g}{L}} ds$. La densidad de masa lineal de la barra es de la forma $\lambda(s) = \alpha s^\beta$ donde s es la distancia al origen $\mathcal{O}$, y α y β son parámetros constantes.



Indicaciones: Asuma que β no adopta valores -1 , -2 o -3 . Considere el ángulo ϕ como el ángulo entre la barra y el eje vertical.

- (a) (0.5 pts) Determine el valor de α en términos de M , L y β .
- (b) (0.5 pts) Calcule la posición $\vec{r}_{CM}$ del centro de masas a lo largo de la barra.
- (c) (1.0 pt) Encuentre una expresión para el momento angular total $\vec{L}_O$ de la barra con respecto al origen $\mathcal{O}$, como función de ϕ .
- (d) (2.0 pts) Determine el torque $\vec{\tau}_O^v$ con respecto al origen $\mathcal{O}$ que la fuerza viscosa ejerce sobre la barra.
- (e) (1 pt) Encuentre la ecuación de movimiento de la barra, válida para pequeñas oscilaciones. Determine el valor de β para que el movimiento de la barra sea del tipo amortiguado crítico.
- (f) (1 pt) Encuentre una expresión para la fuerza total $\vec{F}_v^{\text{tot}}$ que el medio viscoso ejerce sobre la barra. ¿Existe algún valor de β para el cual $\vec{\tau}_O^v$ calculado en la parte (d) sea igual a $\vec{r}_{CM} \times \vec{F}_v^{\text{tot}}$?

Solución P1:

(a) Gracias a Wikipedia sabemos que la componente zz del tensor de inercia de un disco en torno a su centro es $I_{zz}^C = \frac{1}{2}MR^2$. Por otro lado, la velocidad angular del disco es $\vec{\Omega} = -\frac{\dot{x}}{R}\hat{k}$. Luego, el momento angular con respecto a su centro es $\vec{L}_C = -\frac{1}{2}MRx\hat{k}$.

(b) Ni el resorte ni la fuerza de gravedad ejercen torques con respecto al centro del disco. Por otro lado, la tabla ejerce un torque dado por $\vec{\tau}_C^{\text{tabla}} = (R\hat{y}) \times (F_0 \cos(\Omega t)\hat{x}) = -RF_0 \cos(\Omega_0 t)\hat{z}$. El suelo ejerce un roce estático $\vec{F}_e = F_e\hat{x}$ donde F_e es una incógnita por determinar (aquí también se pudo haber escrito $\vec{F}_e = -F_e\hat{x}$). Luego, $\vec{\tau}_C^{\text{suelo}} = (-R\hat{y}) \times (F_e\hat{x}) = RF_e\hat{z}$. Luego, el torque total es: $\vec{\tau}_C = R(F_e - F_0 \cos(\Omega_0 t))\hat{z}$.

(c) Definamos $\delta x = x - D$. De las partes anteriores se desprende que $-\frac{1}{2}M\delta\ddot{x} = F_e - F_0 \cos(\Omega_0 t)$. También se debe tener que $M\vec{a}_{\text{CM}} = \sum \vec{F}$. Luego $M\delta\ddot{x} = F_e + F_0 \cos(\Omega_0 t) - k\delta x$. Juntando ambas ecuaciones vemos que $\delta\ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}\delta x = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M} \cos(\Omega_0 t)$. Vemos que para que el sistema entre en resonancia, se debe tener $\Omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{M}}$.

(d) De los apuntes, sabemos que la solución tiene la forma

$$\delta x(t) = \left[\delta x_0 - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \right] \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \cos(\Omega_0 t) \quad (1)$$

donde $Q_0 = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{M}}$. Usando $\delta x_0 = x_0 - D = -\frac{3F_0}{4k}$ y $v_0 = 0$, vemos que $\delta x(t) = \frac{1}{4}\frac{F_0}{k} \cos(\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{M}}t) - \frac{F_0}{k} \cos(\sqrt{2\frac{k}{M}}t)$. Las dos ecuaciones de la parte (c) pueden ser combinadas para obtener $F_e = F_0 \cos(\Omega_0 t) - \frac{1}{2}M\ddot{x}$. Luego, usando $\delta\ddot{x}(t) = -\frac{1}{6}\frac{F_0}{M} \cos(\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{M}}t) + 2\frac{F_0}{M} \cos(\sqrt{2\frac{k}{M}}t)$, vemos que $F_e = \frac{1}{12}F_0 \cos(\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{M}}t)$.

Solución P2:

(a) La masa es $M = \int_0^L \alpha s^\beta ds = \frac{\alpha}{\beta+1} L^{\beta+1}$. Luego: $\alpha = (\beta+1)M/L^{\beta+1}$.

(b) La posición es $\vec{r}_{\text{CM}} = \hat{\rho} \frac{1}{M} \int_0^L \alpha s^\beta ds = \hat{\rho} \frac{(\beta+1)}{L^{\beta+1}} \int_0^L s^{\beta+1} ds = \frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} L \hat{\rho}$.

(c) Un trocito dm a distancia s tiene velocidad $\vec{v} = s\dot{\phi}\hat{\phi}$. Luego, el momento angular de ese trocito es $d\vec{L} = dm(s\hat{\rho}) \times (s\dot{\phi}\hat{\phi}) = \alpha s^{(\beta+2)} \dot{\phi} \hat{k} ds = (\beta+1) \frac{M}{L^{\beta+1}} s^{(\beta+2)} \dot{\phi} \hat{k} ds$. Por lo tanto, el momento total es $\vec{L} = \int d\vec{L} = (\beta+1) \frac{M}{L^{\beta+1}} \dot{\phi} \hat{k} \int_0^L s^{(\beta+2)} ds = \frac{(\beta+1)}{(\beta+3)} ML^2 \dot{\phi} \hat{k}$.

(d) La fuerza viscosa sobre un trocito de largo ds tiene la forma $d\vec{F}_{\text{rv}} = -dc\vec{v} = -dc s\dot{\phi}\hat{\phi}$. El torque $d\vec{\tau}$ debido a la fuerza viscosa es $d\vec{\tau}_{\text{O}}^{\text{rv}} = (s\hat{\rho}) \times (-dc s\dot{\phi}\hat{\phi}) = -s^2 \dot{\phi} \hat{k} dc = -\dot{\phi} \hat{k} \frac{6M}{L} \sqrt{\frac{g}{L}} s^2 ds$. Luego, el torque total es $\vec{\tau}_{\text{O}}^{\text{rv}} = -\dot{\phi} \hat{k} \frac{6M}{L} \sqrt{\frac{g}{L}} \int_0^L s^2 ds = -2\dot{\phi} \hat{k} ML^2 \sqrt{\frac{g}{L}}$.

(e) El torque debido a la fuerza de gravedad es $\vec{\tau}_{\text{O}}^{\text{g}} = Mg\vec{r}_{\text{CM}} \times (\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}) = -\frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} MgL \sin\phi \hat{k}$. Luego, el torque total es $\vec{\tau}_{\text{O}} = -\frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} MgL \sin\phi \hat{k} - 2\dot{\phi} \hat{k} ML^2 \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Igualando con $\dot{\vec{L}}$ vemos que $\ddot{\phi} + 2\frac{(\beta+3)}{(\beta+1)} \sqrt{\frac{g}{L}} \dot{\phi} + \frac{(\beta+3)}{(\beta+2)} \frac{g}{L} \sin\phi = 0$. Aproximando para pequeñas oscilaciones obtenemos $\ddot{\phi} + 2\frac{(\beta+3)}{(\beta+1)} \sqrt{\frac{g}{L}} \dot{\phi} + \frac{(\beta+3)}{(\beta+2)} \frac{g}{L} \phi = 0$. La condición para que el movimiento sea crítico es $\frac{(\beta+3)^2}{(\beta+1)^2} = \frac{(\beta+3)}{(\beta+2)}$. Esto es posible si $\beta = -5/3$.

(f) La fuerza total debido al roce viscoso es $\vec{F}_{\text{rv}} = \int d\vec{F}_{\text{rv}} = -\dot{\phi} \hat{k} \frac{6M}{L} \sqrt{\frac{g}{L}} \int_0^L s ds = -\dot{\phi} \hat{k} 3ML \sqrt{\frac{g}{L}}$. Luego $\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{v}}^{\text{tot}} = -\frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} L \hat{\rho} \times \dot{\phi} \hat{k} 3ML \sqrt{\frac{g}{L}} = -3\frac{(\beta+1)}{(\beta+2)} \dot{\phi} ML^2 \sqrt{\frac{g}{L}} \hat{k}$. Comparando con $\vec{\tau}_{\text{O}}^{\text{rv}} = -2\dot{\phi} \hat{k} ML^2 \sqrt{\frac{g}{L}}$ vemos que ambas cantidades son iguales si $\beta = 1$.

Mecánica FI2001-5

Tarea 1: Lunes 13 de abril, 2020

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y Bernardita Ried.

P1: En el plano XY una partícula P comienza su movimiento en el origen y se mueve siempre con rapidez v_0 siguiendo una trayectoria tal que la velocidad de P forma un ángulo $\theta(t)$ con el eje X . Suponga que $\theta(t) = \omega t$ y demuestre que la trayectoria es una circunferencia. Determine el radio de ella.

P2: Una partícula P se mueve a lo largo de una trayectoria que, en coordenadas cilíndricas, viene descrita por

$$\rho = \rho_0, \quad \phi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 t^2, \quad z(t) = A\phi(t), \quad (1)$$

donde α_0 y A son constantes.

(a) Obtenga expresiones (en términos de la base cilíndrica) para la velocidad y la aceleración.

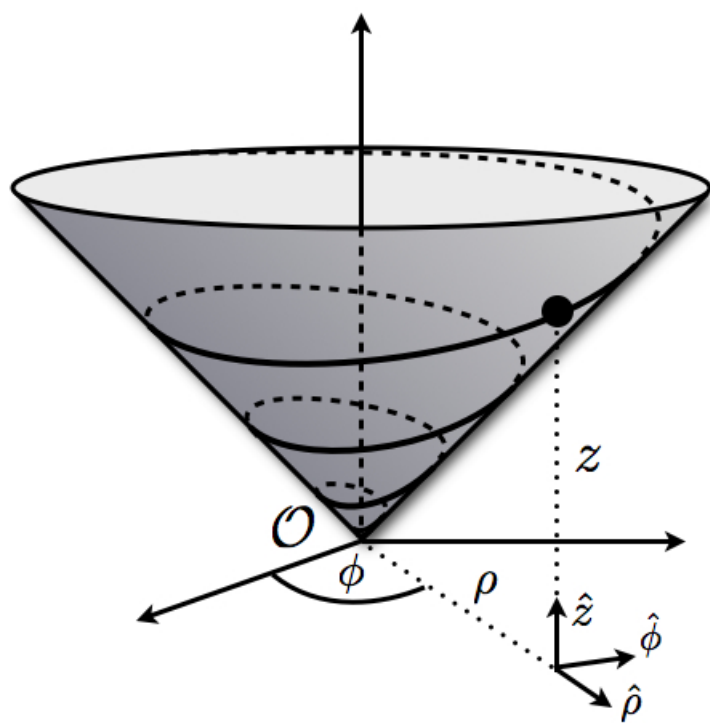
(b) Determine la longitud del camino recorrido por la partícula entre $t_i = 0$ y $t_f = T$. (Recuerde que durante un lapso de tiempo dt , el desplazamiento de la partícula descrito por el vector $d\vec{r} = \vec{v}dt$).

P3: Un punto P se mueve en una trayectoria que, descrita en coordenadas cilíndricas, satisface $z(t) = \rho(t)$, $dz = R d\phi$ y $\phi = \omega t$. Se trata de una trayectoria apoyada en una superficie cónica, como lo indica la figura. Para $t = 0$ se cumple $z = 0$.

(a) Usando coordenadas cilíndricas, escriba los vectores posición y velocidad para un tiempo cualquiera.

(b) Calcule la velocidad angular de P con respecto al origen.

(c) Obtenga el vector $\hat{t}$ tangente a la trayectoria.



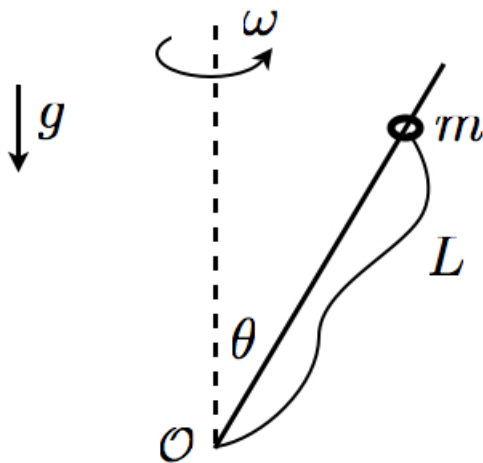
Mecánica FI2001-5

Tarea 2: Lunes 20 de abril, 2020

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y Bernardita Ried.

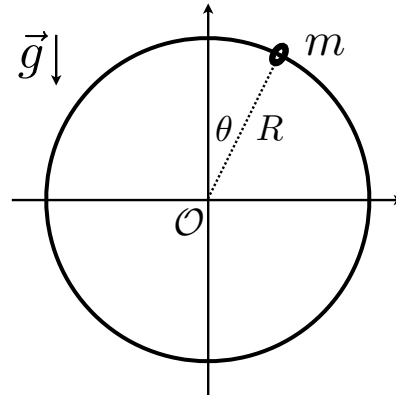
P1: Una argolla de masa m puede deslizarse sin roce a lo largo de una varilla que gira con velocidad angular uniforme: $\dot{\phi} = \omega$ siempre formando un ángulo θ con la vertical. Una cuerda de largo L mantiene uno de sus extremos atada a la argolla y otro al origen $\mathcal{O}$ de modo que la argolla no pueda desplazarse más allá de lo permitido por esta restricción. Suponga que la varilla gira lo suficientemente rápido como para que la argolla mantenga tensa a la cuerda.

- (a) Determine la tensión de la cuerda como función de los datos del problema.
- (b) Determine la velocidad angular mínima $\omega_{\min}$ para la cual la argolla no cae hacia el origen $\mathcal{O}$.



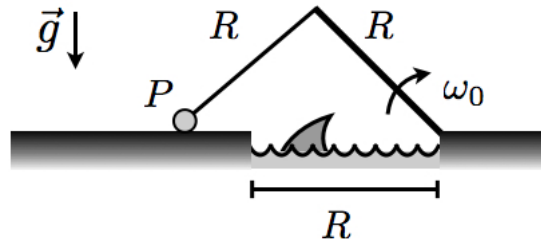
P2: Se tiene un aro de radio R contenido en un plano vertical. Un pequeño anillo de masa m desliza sin roce comenzando su movimiento con rapidez nula desde el punto más alto del aro.

- (a) Encuentre el punto H del aro en que la aceleración de la partícula es horizontal.
- (b) Indique la expresión del vector fuerza normal cuando el anillo pasa por el punto H.



P3: Para pasar un bulto P de masa m de un lado al otro de un río de ancho R se utiliza el método que sigue (ver figura). P se ata a una cuerda de largo R que está unida al extremo superior de una vara de largo R ; el extremo inferior de la barra tiene un punto de giro en la orilla derecha del río (figura). La barra se hace girar desde su posición horizontal con velocidad angular ω_0 en torno a una rótula a la orilla del río. Si toma la posición inicial del bulto como el origen, entonces la distancia entre el origen y la rótula es $2R$. Despreciando todo roce:

- (a) Demuestre que mientras la carga va por tierra firme la tensión de la cuerda es constante. Determine su valor.
- (b) Determine el valor que debe tener ω_0 para que P se despegue del suelo justo antes de llegar al río.



Mecánica FI2001-5

Tarea 3: Lunes 27 de abril, 2020

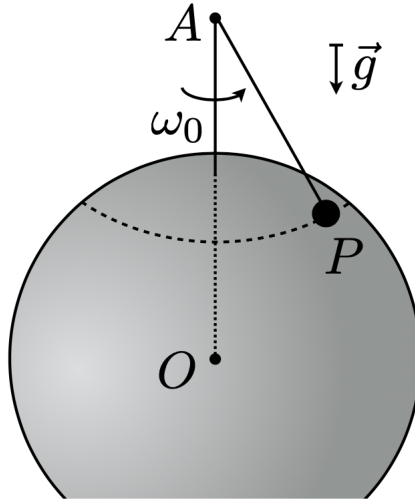
Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y Bernardita Ried.

P1: Una partícula P de masa m cuelga de una cuerda AP de largo L cuyo extremo superior permanece fijo en A . La partícula realiza un movimiento circular sobre la superficie de una esfera de radio L cuyo origen O se encuentra justo debajo de A , a una distancia $\sqrt{2}L$. Inicialmente la partícula gira en torno al eje OA con una velocidad angular ω_0 , tal que la fuerza normal que la esfera ejerce sobre P es nula. Además, sobre la partícula actúa una fuerza gravitacional $F_g = m\vec{g}$ (ver figura) y una fuerza de roce viscoso lineal $\vec{F}_v = -c\vec{v}$.

(a) **2pts.** Encuentre la velocidad angular de la partícula en torno al eje OA , como función del ángulo barrido por la partícula desde el momento inicial.

(b) **2pts.** Determine el valor de la fuerza que la cuerda ejerce sobre la partícula en función del ángulo barrido por la partícula desde el momento inicial.

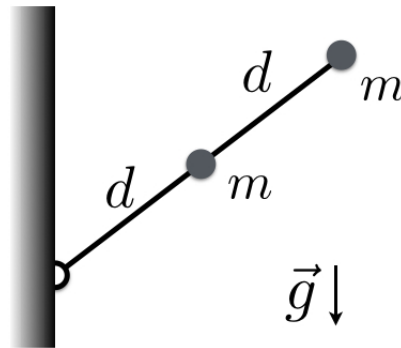
(c) **2pts.** Obtenga el ángulo total ϕ_{tot} que barre P desde el momento inicial hasta que se detiene.



P2: Dos partículas de masa m están unidas a una barra inextensible sin masa de largo $2d$, tal como indica la figura. La barra puede rotar libremente con respecto a una rótula fija a la pared. Inicialmente, el sistema es soltado desde la posición vertical, con las masas arriba de la rótula.

(a) Encuentre la velocidad angular del sistema en función del ángulo que forma con la vertical.

(b) Calcule la fuerza que ejerce la rótula sobre la barra cuando ésta pasa por la posición horizontal.



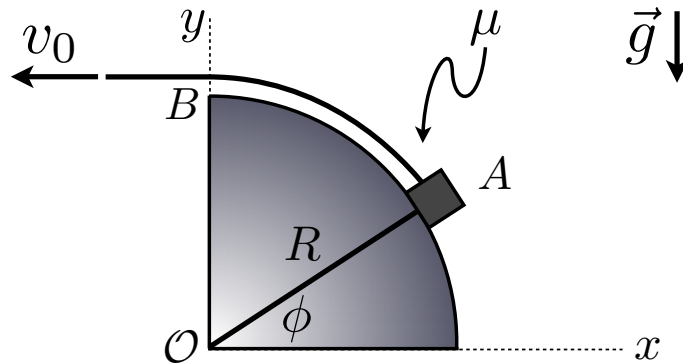
Mecánica FI2001-5

Tarea 4: Lunes 11 de mayo, 2020

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y Bernardita Ried.

Una partícula de masa m se encuentra sobre el manto de un semi-cilindro de radio R como muestra la figura. Una cuerda ideal arrastra a la partícula con rapidez constante v_0 a partir del punto A en que $\theta = 30^\circ$. Entre la partícula y el semi-cilindro existe un roce cinético de coeficiente μ y además existe un roce viscoso lineal con el aire de la forma $-c\vec{v}$.

- (a) Escoja adecuadamente coordenadas cilíndricas adaptadas a la configuración del sistema, y determine expresiones para la posición, velocidad y aceleración para la masa m .
- (b) Determine expresiones para cada una de las fuerzas actuando sobre m en términos de la base cilíndrica.
- (c) Determinar el mayor valor que puede tener v_0 , tal que la partícula no se separe del semi-cilindro en el tramo A - B , donde B es el punto más alto del semi-cilindro.
- (d) Suponiendo que la partícula no se separa del semi-cilindro, determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula, en su movimiento entre A y B .
- (e) Calcule el trabajo debido a la fuerza total, a lo largo de la trayectoria entre A y B .
- (f) Determine cómo cambia el resultado de la parte (e) si hubiera una fuerza adicional $\vec{F} = \alpha(y\hat{x} - x\hat{y})$, donde α es una constante positiva.

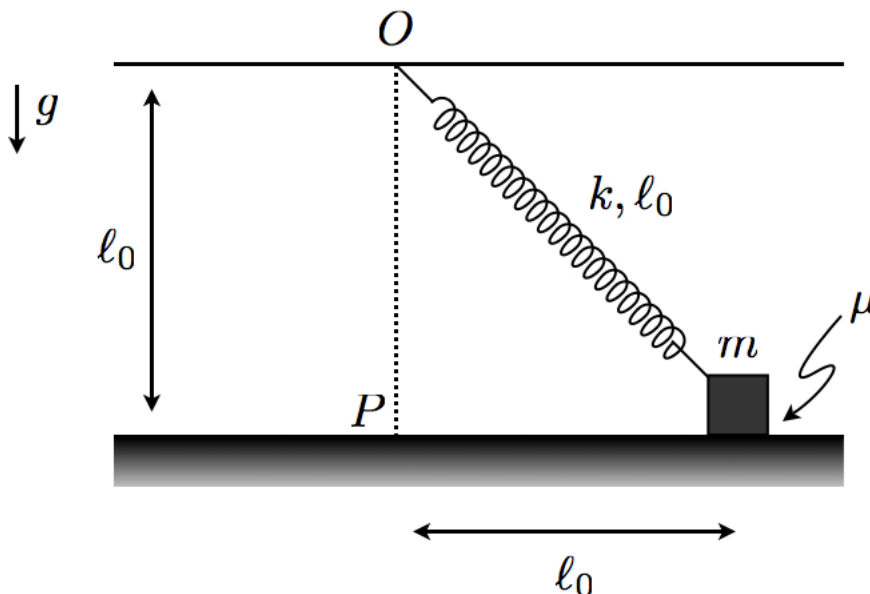


Mecánica FI2001-5
Tarea 5: Lunes 1 de junio, 2020

**Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y
Bernardita Ried.**

Considere un bloque de masa m que se mueve por una superficie horizontal con la cual tiene un coeficiente de roce cinético μ desconocido. El bloque está unido a un resorte de constante elástica k y largo natural ℓ_0 , cuyo otro extremo está unido a un punto fijo O ubicado a una altura ℓ_0 de la superficie horizontal. En $t = 0$ el bloque se suelta desde el reposo a una distancia ℓ_0 a la derecha del punto P correspondiente a la proyección vertical de O sobre la superficie (ver figura). Determine:

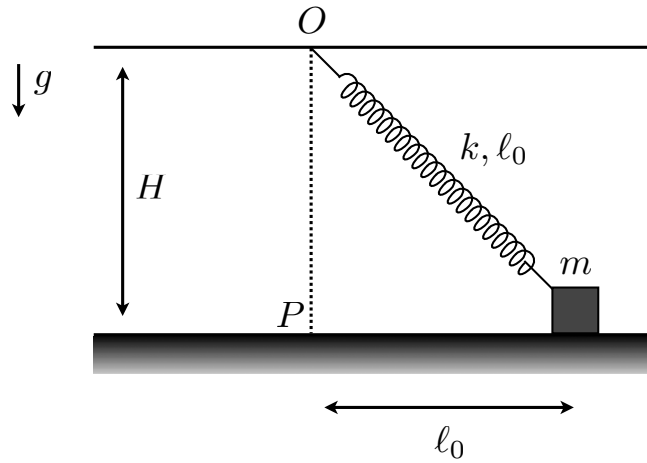
- (a) La condición entre m , g , k y ℓ_0 tal que el bloque no se separe del piso en su movimiento.
- (b) Si el bloque se vuelve a detener a una distancia $\ell_0/2$ a la izquierda de P , determine el valor de μ en función de m , k , ℓ_0 y g . Suponga que se satisface la condición de (a).
- (c) Indique el trabajo realizado por cada una de las fuerzas presentes en el problema entre la condición inicial y el instante en que el bloque pasa por el punto P .
- (d) Determine la cantidad de energía mecánica perdida por el sistema. ¿Dónde se fue esa energía?



Mecánica FI2001-5
Tarea 6: Lunes 8 de junio, 2020

**Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y
Bernardita Ried.**

Considere un bloque de masa m que se mueve por una superficie horizontal lisa. El bloque está unido a un resorte de constante elástica k y largo natural ℓ_0 , cuyo otro extremo está unido a un punto fijo O ubicado a una altura $H < \ell_0$ sobre la superficie horizontal (ver figura).



- (a) Determine los puntos de equilibrio del sistema. Determine si estos son estables o inestables.
- (b) Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de cada punto de equilibrio estable.
- (c) Establezca un criterio para el cual usted considera que las oscilaciones son pequeñas. Por ejemplo, encuentre una función $\mathcal{E}$ de los parámetros del sistema (H , ℓ , etc.) tal que la energía mecánica E debe cumplir $E \ll \mathcal{E}$ para que la aproximación de pequeñas oscilaciones sea confiable.

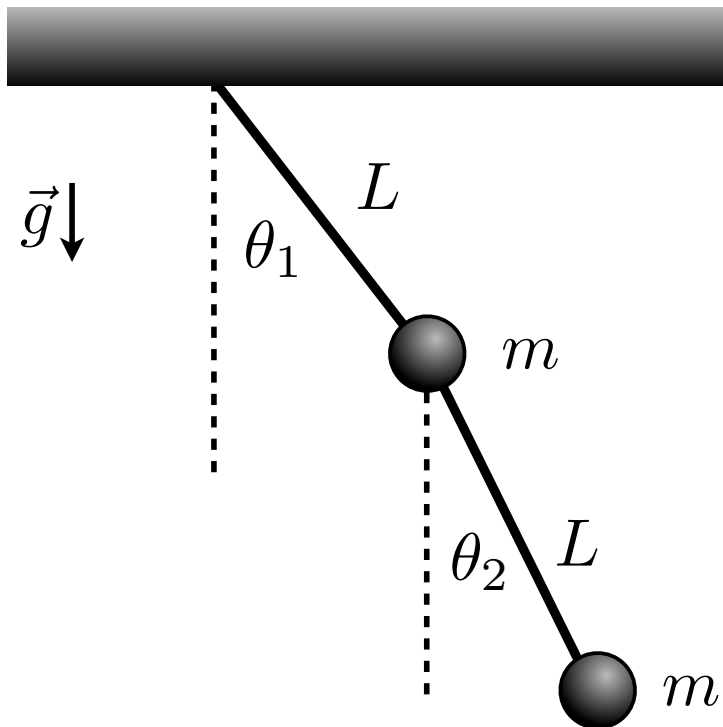
Mecánica FI2001-5

Tarea 7: Miércoles 24 de junio, 2020

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y Bernardita Ried.

Desde un péndulo de masa m y largo L se sujeta otro péndulo exactamente igual de modo que ambos pueden oscilar libremente en el plano vertical (ver figura). Si sus oscilaciones se describen respecto a los ángulos que cada péndulo forma con la vertical, θ_1 y θ_2 :

- (a) Encuentre las ecuaciones de movimiento acopladas para pequeñas oscilaciones del sistema.
- (b) Determine las frecuencias propias del sistema, y sus respectivos modos normales. Bosqueje los modos encontrados.

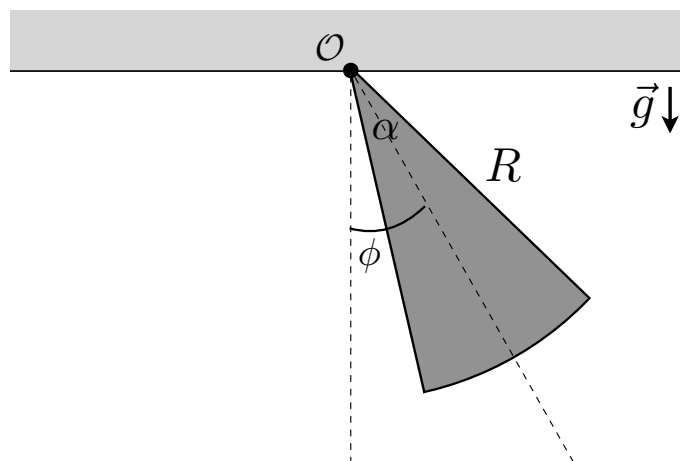


Mecánica FI2001-5
Tarea 8: Martes 14 de julio, 2020

**Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: César Gallegos, Rocío González y
Bernardita Ried.**

Un péndulo consiste en un pedazo de pizza (de radio R) de masa M colgando desde el techo (ver figura). El ángulo del corte del pedazo de pizza es α . La pizza solo puede girar en torno a un eje perpendicular al plano la figura.

- (a) Determine la densidad de masa superficial de la pizza (asuma que la pizza es una pizza margarita).
- (b) Determine el momento angular de la pizza con respecto al origen cuando el eje de simetría tiene un ángulo ϕ y rapidez angular $\dot{\phi}$. Sugerencia: Divida el pedazo de pizza en trocitos de área dA y calcule el momento angular debido a cada trocito.
- (c) Calcule el torque sobre el pedazo de pizza con respecto al origen cuando el eje de simetría tiene un ángulo ϕ .
- (d) A partir de (c), determine la ecuación de movimiento del péndulo. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del péndulo?
- (e) ¿Qué fuerza ejerce el techo sobre el pedazo de pizza? Sugerencia: Considere la ecuación de movimiento $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{tot}^{ext}$.



Nota: Este problema se resuelve fácilmente con la introducción del concepto de tensor de inercia (lo que veremos en la próxima clase). El desafío aquí es hacerlo sin dicho concepto.