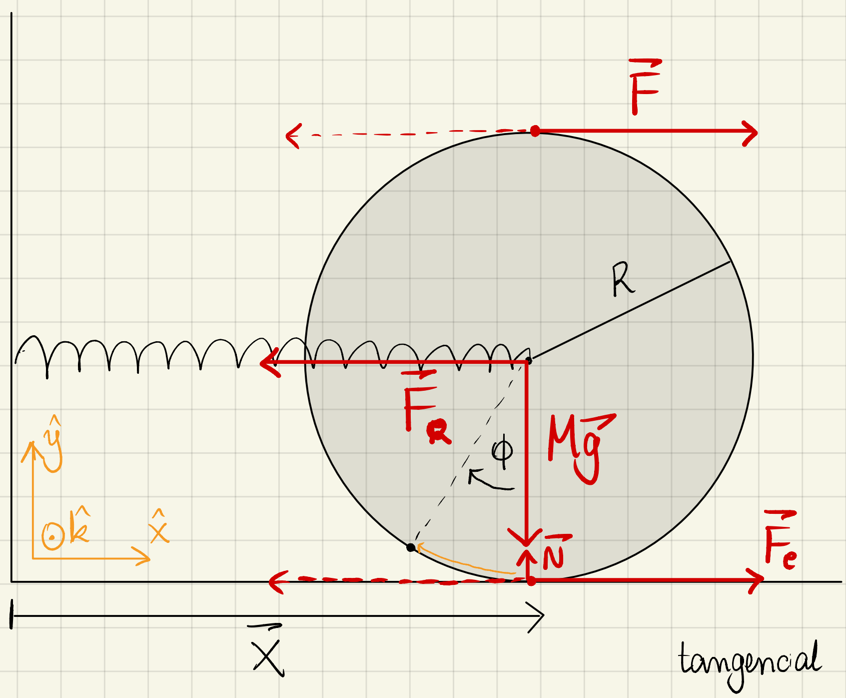
Auxiliar 29

P1



a) Recordemos que la matriz de inercia es una propiedad intrínseca del sólido, por lo que re-usamos la que calculamos el auxiliar anterior

$$I_{CM} = \begin{pmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{pmatrix}$$

Si nos fijamos en un punto de la superficie, su velocidad vista desde un punto en el suelo es $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}\,'$$

donde como no resbala $\vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{v}\,'$ es la velocidad del punto vista desde el CM que sería una velocidad tangencial $\vec{v}\,' = -R\dot{\phi}\hat{x}$ y $\vec{v}_{CM} = \dot{x}\hat{x}$

Cuando ese punto hace contacto con el piso

$$\Rightarrow \vec{0} = \dot{x}\hat{x} - R\dot{\phi}\hat{x} \Leftrightarrow \dot{x} = R\dot{\phi}$$

Toca definir la velocidad angular $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ donde por regla de la mano derecha sería

$$\vec{\Omega} = -\dot{\phi}\hat{k} = -\frac{\dot{x}}{R}\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\dot{x}}{R} \end{pmatrix} \qquad \therefore \vec{L} = I_0\vec{\Omega} = -\frac{MR}{2}\dot{x}\hat{k}$$

b) Queremos calcular el torque c/r al CM (tenemos el $\vec{L}$ c/r al CM también) así que notamos que los brazos de palanca de $\vec{F}_e$ y $M\vec{g}$ son $\vec{0}$, así que estas fuerzas no ejercen torque, mientras que $\vec{F}_e$ y $\vec{F}$ sí (y $\vec{N}$ es paralelo al brazo de palanca)

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = -R\hat{y} \times (F_e\hat{x}) + R\hat{y} \times (F_0\cos(\Omega_0 t)\hat{x})$$

$$= RF_e\hat{k} - RF_0\cos(\Omega_0 t)\hat{k} \longleftarrow \text{torque total}$$

c) Usamos $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$ (con ambos medidos desde CM)

$$-\frac{MR}{2}\ddot{x}\hat{k} = RF_e\hat{k} - RF_0\cos(\Omega_0 t)\hat{k} \quad (1)$$

no conocemos F_e, así que saquemos otra ecuación de $M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$, donde $\vec{R}_{CM} = x\hat{x} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = \ddot{x}\hat{x}$ y

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = M\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_R + \vec{F} + \vec{N} = -Mg\hat{y} + F_e\hat{x} - k(x-D)\hat{x} + F_0\cos(\Omega_0 t)\hat{x} + N\hat{y}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x}\hat{x} = -Mg\hat{y} + F_e\hat{x} - k(x-D)\hat{x} + F_0\cos(\Omega_0 t)\hat{x} + N\hat{y}$$

la ec escalar en $\hat{x}$) nos dice $M\ddot{x} = F_e - k(x-D) + F_0\cos(\Omega_0 t) \Leftrightarrow F_e = M\ddot{x} + k(x-D) - F_0\cos(\Omega_0 t)$, reemplazando en (1)

$$\Rightarrow -\frac{MR}{2}\ddot{x} = RM\ddot{x} + Rk(x-D) - RF_0\cos(\Omega_0 t) - RF_0\cos(\Omega_0 t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}\cdot\frac{3M}{2} + k(x-D) - 2F_0\cos(\Omega_0 t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}(x-D) = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M}\cos(\Omega_0 t)$$, definamos $u = x-D \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}$ y $\omega_0^2 \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{M}}$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}u = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M}\cos(\Omega_0 t)$$

la sol. homogénea es $u_h(t) = A\cos\left(\frac{2}{3}\frac{k}{M}t\right) + B\sin\left(\frac{2}{3}\frac{k}{M}t\right)$ y para la particular proponemos $u_p(t) = C\cdot\cos(\Omega_0 t)$

$$\Rightarrow -C\Omega_0^2\cancel{\cos(\Omega_0 t)} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}C\cancel{\cos(\Omega_0 t)} = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M}\cancel{\cos(\Omega_0 t)}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{2}{3}\frac{k}{M} - \Omega_0^2\right) = \frac{4}{3}\frac{F_0}{M} \Rightarrow C = \frac{4F_0/3M}{2k/3M - \Omega_0^2}$$

definamos $\omega_0^2 \equiv \frac{2k}{3M}$, $Q_0 \equiv \frac{4F_0}{3M}$ $\Rightarrow u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\cos(\Omega_0 t)$ (2)

donde notamos que si $\Omega_0 = \omega_0$ la sol. particular diverge $\Rightarrow$ resonancia!

d) Nuestras C.I. serían $u(t=0) = x(t=0) - D = \frac{3F_0}{4k}$ y $\dot{u}(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$, utilizándolas en (2)

▷ $u(t=0) = A + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2} \overset{!}{=} \frac{3F_0}{4k} \Rightarrow A = \frac{3F_0}{4k} - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}$

▷ $\dot{u}(t=0) = B\omega_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B = 0$

$x = u + D$

$$\therefore x(t) = \left(\frac{3F_0}{4k} - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\cos(\Omega_0 t) + D \quad (3)$$

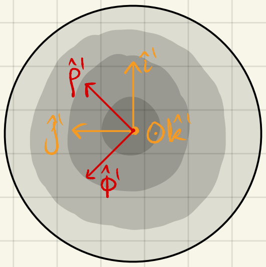
nos dicen que $\Omega_0^2 = 2k/M$
me dio pereza reemplazar

Para encontrar F_e derivamos (3) y reemplazamos en (1)

$$F_e = -\frac{M}{2}\left[-\omega_0^2\left(\frac{3F_0}{4k} - \frac{Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) - \frac{\Omega_0^2 Q_0}{\omega_0^2 - \Omega_0^2}\cos(\Omega_0 t)\right] + F_0\cos(\Omega_0 t)$$

P2

a) Olvidémosnos del metrónomo completo y calculemos el tensor de inercial del disco



Hacemos el cambio de variable $x'=\rho'\cos\phi'$ ^ $y'=\rho'\sin\phi'$ considerando $z'=0$, los elementos fuera de la diagonal son 0 por las mismas razones del auxiliar anterior ($z'=0$ y $\int_0^{2\pi}\cos\phi'\sin\phi'\,d\phi'=0$)
Para calcular los elementos de la diagonal usamos que

$$dm'(r')=\sigma'(r')\,dA'=\frac{2M}{\pi R^4}(R^2-r^2)\,\rho'd\rho'd\phi'$$

▷ $$I_{CM}^{11}=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}(\rho'^2-\rho'^2\cos^2\phi')\,\frac{2M}{\pi R^4}(R^2-\rho'^2)\,\rho'd\rho'd\phi'$$

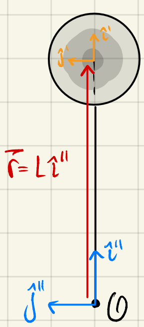
$$=\frac{2M}{\pi R^4}\int_0^{2\pi}\sin^2\phi'\,d\phi'\left[R^2\int_0^R\rho'^3d\rho'-\int_0^R\rho'^4d\rho'\right]=\frac{MR^2}{6}$$

▷ $$I_{CM}^{22}=\frac{2M}{\pi R^4}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi'\,d\phi'\left[R^2\int_0^R\rho'^3d\rho'-\int_0^R\rho'^4d\rho'\right]=\frac{MR^2}{6}$$

▷ $$I_{CM}^{33}=\frac{4M}{R^4}\left[R^2\int_0^R\rho'^3d\rho'-\int_0^R\rho'^4d\rho'\right]=\frac{MR^2}{3}$$

$$\therefore\ I_{CM}=\frac{MR^2}{6}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

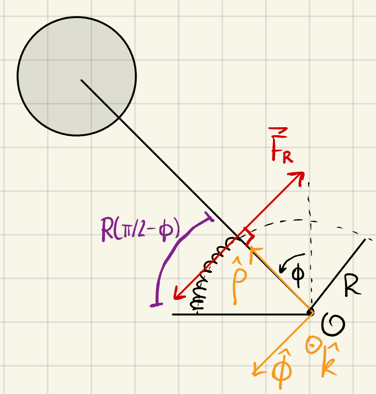
b) Queremos utilizar $\dot{\vec{L}}=\vec{\tau}$ así que usemos Steiner para obtener el tensor de inercia medido c/r a O



Por dibujo tenemos $\vec{r}=(L,0,0)$ así que se nos va la mayoría de elementos de la contribución por Steiner

muy parecido al aux anterior

$$\Rightarrow I_O=I_{CM}+ML^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}R^2/6&0&0\\0&L^2+R^2/6&0\\0&0&L^2+R^2/3\end{pmatrix}$$



Como ignoramos la gravedad, solo el resorte genera torque dado por

$$\vec{\tau}=\sum_i\vec{\tau}_i=\vec{r}_1\times\vec{F}_1=R\hat{\rho}\times\left(+k\left(\overbrace{R\left(\cancel{\frac{\pi}{2}}-\phi\right)}^{r}-\overbrace{\cancel{\frac{R\pi}{2}}}^{l_0}\right)\hat{\phi}\right)$$

en $\phi>0$ el resorte estaría comprimido

$$=-R^2k\phi\hat{k}$$

Para calcular $\vec{L}=I_O\vec{\Omega}$ usamos regla de la mano derecha $\vec{\Omega}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\phi}\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{L}=M\left(L^2+\frac{R^2}{3}\right)\dot{\phi}\hat{k}\Rightarrow\dot{\vec{L}}=M\left(L^2+\frac{R^2}{3}\right)\ddot{\phi}\hat{k}$

así que la EoM sería

$$M\left(L^2+\frac{R^2}{3}\right)\ddot{\phi}+R^2k\phi=0 \iff \ddot{\phi}+\omega_0^2\phi=0 \quad \text{con } \omega_0^2\equiv\frac{R^2k}{M}\left(L^2+\frac{R^2}{3}\right)^{-1}$$

c) Para hacer aparecer la fuerza del pivote ocupamos $M\ddot{\vec{R}}_{cm}=\sum_i \vec{F}_i^{ext}$ donde $\vec{R}_{cm}=L\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{cm}=L\dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{cm}=-L\dot{\phi}^2\hat{\rho}+L\ddot{\phi}\hat{\phi}$
y las fuerzas serán

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext}=\vec{F}_R+\vec{F}_\rho+\vec{F}_\phi$$

$$=-kR\phi\hat{\phi}+F_\rho\hat{\rho}+F_\phi\hat{\phi}\ , \quad \text{donde } \vec{F}_{piv}=F_\rho\hat{\rho}+F_\phi\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow M(-L\dot{\phi}^2\hat{\rho}+L\ddot{\phi}\hat{\phi})=-kR\phi\hat{\phi}+F_\rho\hat{\rho}+F_\phi\hat{\phi}$$

$$\hat{\rho})\ F_\rho=-ML\dot{\phi}^2 \qquad \hat{\phi})\ F_\phi=ML\ddot{\phi}+kR\phi$$

donde $\ddot{\phi}=-\omega_0^2\phi$ y ocupando truco de mecánica

$$\int_0^{\dot{\phi}}\dot{\phi}\,d\dot{\phi}=-\omega_0^2\int_{\phi_0}^{\phi}\phi\,d\phi \iff \frac{\dot{\phi}^2}{2}=-\frac{\omega_0^2}{2}(\phi^2-\phi_0^2)$$

$$\therefore \vec{F}_{piv}=ML\omega_0^2(\phi^2-\phi_0^2)\hat{\rho}-ML\omega_0^2\phi\hat{\phi}+kR\phi\hat{\phi}$$

Si hacemos $\vec{F}_{piv}\cdot\hat{\phi}=0 \iff -\cancel{M}L\dfrac{R^2\cancel{k}}{\cancel{M}}\dfrac{1}{(L^2+R^2/3)}+\cancel{k}R\overset{!}{=}0 \iff -LR+L^2+R^2/3\overset{!}{=}0$

$$\Rightarrow L_{1,2}=\frac{R\pm\sqrt{R^2-4R^2/3}}{2}\in\mathbb{C}\ \longrightarrow\!\!\!\!\times$$