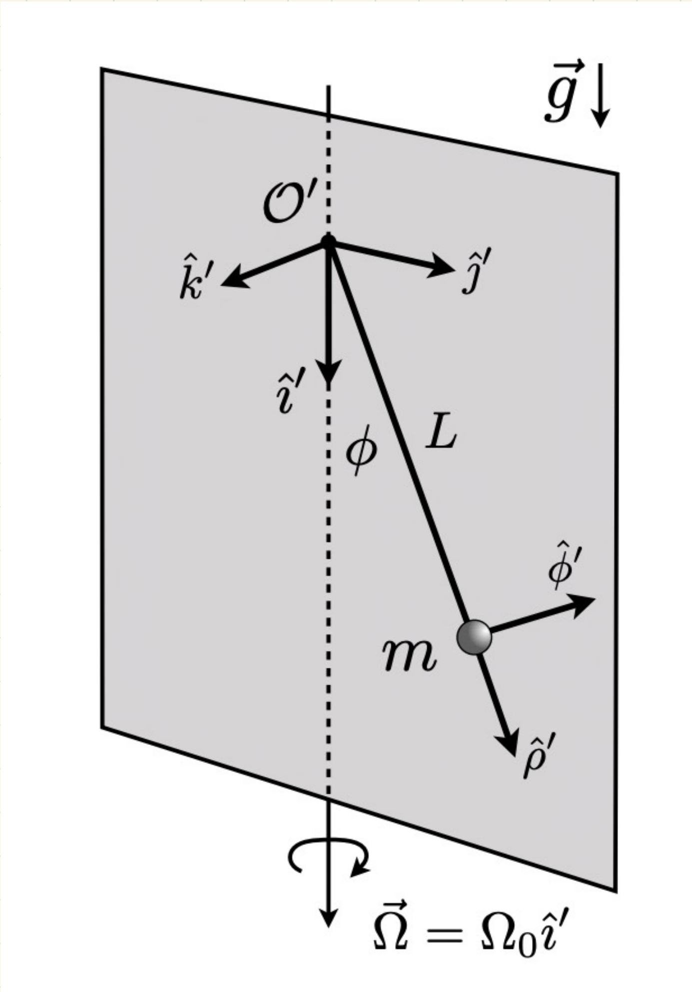
Control 3

P3



Seguiremos los mismos pasos del auxiliar 24 y 25

1. Definir el sist. de S' y la posición $\vec{r}'$
2. Describir $\vec{R}$ y con ello $\ddot{\vec{R}}$
3. Definir la velocidad angular $\vec{\Omega}$
4. Calcular las fuerzas reales $\Sigma \vec{F}$
5. Pasar todos los vectores de S al sist. de S'
6. Calcular los términos de la fórmula maestra

1er paso: S' y $\vec{r}'$

Ya nos definieron el sistema cilíndrico para S', entonces

$$\vec{r}' = L\hat{\rho}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = L\dot{\phi}\hat{\phi}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}}' = L\ddot{\phi}\hat{\phi}' - L\dot{\phi}^2\hat{\rho}'$$

+0.2 $\vec{r}'$ y sus derivados

+0.2 expresar $m\ddot{\vec{r}}'$

2do paso: $\vec{R}$

Notamos que si para S definimos un sist. cilíndrico en el eje de rotación (igual que en el Aux 25), la distancia que separa a O y O' es siempre $\vec{0}$, ya que están en el mismo punto del eje de rotación

$$\therefore \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = \vec{0}$$ +0.2 $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$

+0.1 definir un $\vec{R}$ cte.

3er paso: $\vec{\Omega}$

"Definiendo" un sist. cartesiano en el eje de rotación para S, notamos que el sistema $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ (ya definido en el dibujo) como es solidario a la rotación del plano vertical, entonces rotaría con una rapidez Ω_0 c/r al $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ de S' y en la dirección de $\hat{\imath}'$

$$\therefore \vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{\imath}'$$ +0.5 expresión de $\vec{\Omega}$

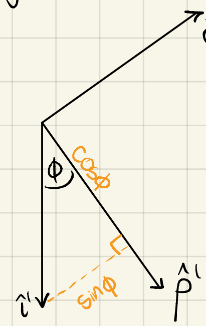
4to paso: Fuerzas reales

Tenemos las mismas fuerzas del aux 25: peso, tensión y normal

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = mg\hat{\imath}' - T\hat{\rho}' + N_{z'}\hat{k}'$$ +0.4 encontrar $\vec{F}$ en algún sist.

5^{to} paso: Pasar todo a un único sistema

Nos conviene pasar todo a $\{\hat{\rho}', \hat{\phi}', \hat{k}'\}$, para obtener la ec. de mov. de ϕ independiente de T y $N_{z'}$. Notamos que solo debemos reescribir $\hat{i}'$ (que sale en $\vec{\Omega}$ y $mg\hat{i}'$)



Por el dibujo de al lado tenemos $\hat{i}' = \cos\phi\,\hat{\rho}' - \sin\phi\,\hat{\phi}'$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \Omega_0(\cos\phi\,\hat{\rho}' - \sin\phi\,\hat{\phi}') \quad \text{y} \quad \vec{F}_{peso} = mg(\cos\phi\,\hat{\rho}' - \sin\phi\,\hat{\phi}')$$

+0.2 pasar a un único sistema

+0.2 expresar $\vec{F}$ en un único sistema

6^{to} paso: Reemplazar

Calculamos cada término de la fórmula maestra

- $m\ddot{\vec{r}}' = mL\ddot{\phi}\hat{\phi}' - mL\dot{\phi}^2\hat{\rho}'$ $\boxed{0.4 \text{ tot}}$
- $\vec{F} = mg\cos\phi\,\hat{\rho}' - mg\sin\phi\,\hat{\phi}' - T\hat{\rho}' + N_{z'}\hat{k}'$ $\boxed{0.6 \text{ tot}}$ ← ya contado en verde
- $-m\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ $\boxed{0.3 \text{ tot}}$
- $-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = m\Omega_0(-\cos\phi\,\hat{\rho}' + \sin\phi\,\hat{\phi}')\times(\Omega_0(\cos\phi\,\hat{\rho}' - \sin\phi\,\hat{\phi}')\times L\hat{\rho}')$

  $= m\Omega_0^2L(-\cos\phi\,\hat{\rho}' + \sin\phi\,\hat{\phi}')\times\sin\phi\,\hat{k}' = m\Omega_0^2L\cos\phi\sin\phi\,\hat{\phi}' + m\Omega_0^2L\sin^2\phi\,\hat{\rho}'$ +0.2
- $-2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}}' = 2m\Omega_0(-\cos\phi\,\hat{\rho}' + \sin\phi\,\hat{\phi}')\times L\dot{\phi}\hat{\phi}' = -2m\Omega_0L\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{k}'$ +0.2 ← por productos cruzes
- $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}' = \vec{0}$, ya que $\frac{d}{dt}\Omega\hat{i}' = \vec{0}$ porque $\hat{i}'$ no cambia en el tiempo (Ω_0 tampoco) +0.1 identificar $\vec{\Omega}$ cte.

Juntamos todo

$$mL\ddot{\phi}\hat{\phi}' - mL\dot{\phi}^2\hat{\rho}' = mg\cos\phi\,\hat{\rho}' - mg\sin\phi\,\hat{\phi}' - T\hat{\rho}' + N_{z'}\hat{k}' + m\Omega_0^2L\cos\phi\sin\phi\,\hat{\phi}' + m\Omega_0^2L\sin^2\phi\,\hat{\rho}' - 2m\Omega_0L\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{k}'$$

y las ecs. de mov. escalares serían

$\hat{\rho}'$) $-mL\dot{\phi}^2 = mg\cos\phi - T + m\Omega_0^2L\sin^2\phi$

$\hat{\phi}'$) $mL\ddot{\phi} = -mg\sin\phi + m\Omega_0^2L\cos\phi\sin\phi$ +1.5 ec. de mov.

$\hat{k}'$) $0 = N_{z'} - 2m\Omega_0L\dot{\phi}\cos\phi$

Como se predijo, la ec. de mov. quedó ind. de T y $N_{z'}$. Ahora, de $\hat{\phi}'$) (la ec. de mov.) notamos que para encontrar puntos de equilibrio (sin saber si son estables o inestables) imponemos $\ddot{\phi}(\phi=\phi^*) \doteq 0$,

$$\Rightarrow 0 = -mg\sin\phi^* + m\Omega_0^2L\cos\phi^*\sin\phi^*$$

donde notamos que $\phi^*=0$ **siempre** cumple esta imposición ($\sin 0 = 0$), entonces hagámosle Taylor a la ec. de mov.

+0.5 dem $\phi=0$ es pto. equilibrio

en torno a este pto. de equilibrio $\phi^* = \phi_{eq} = 0 \Rightarrow \phi(t) = \delta\phi(t)$ con $|\delta\phi| \ll 1$

$$\Rightarrow mL\ddot{\delta\phi} = -mg\delta\phi + m\Omega_0^2 L\delta\phi$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta\phi} + \left(\frac{g}{L} - \Omega_0^2\right)\delta\phi = 0$$ +0.2 ec. de mov. MAS

que tiene la forma de un oscilador armónico, donde efectivamente habrá oscilación ssi

$$\frac{g}{L} - \Omega_0^2 > 0 \Rightarrow \Omega_0^2 \in [0, g/L]$$

entonces si $\Omega_0^2 \in [0, g/L]$, $\phi = 0$ sería un pto. de equilibrio **estable**. +0.3 encontrar rango de Ω_0^2

(c) De la ec. de mov. de $\hat{k}')$ despejamos la normal

$$N_{z'} = 2m\Omega_0 L\dot{\phi}\cos\phi$$

donde notamos que tanto $\dot{\phi}$ como $\cos\phi$ cambian de signo y no necesariamente al mismo tiempo, por lo que $N_{z'}$ también cambiaría de signo, y como sabemos que la partícula estaría en contacto con la pared ssi $N_{z'} > 0$ entonces en algún momento de la oscilación la masa se despegaría ($N_{z'}$ pasa de positivo a negativo). +0.8 por argumentación

$\therefore$ No es posible que el péndulo oscile sin que se despegue +0.2 por concluir