

Ejercicio 8

(a) Calculamos las derivadas $\partial L / \partial x_i$ e imponemos que sean iguales a 0

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1^0 - D/4) + k(x_2^0 - x_1^0 - D) = 0 \quad (1)$$

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2^0 - x_1^0 - D) - k(x_2^0 - 3D/4) = 0 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2)

$$\Rightarrow -x_1^0 + D/4 - x_2^0 + 3D/4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^0 = D - x_2^0 \quad (3)$$

reemplazando (3) en (1)

$$\Rightarrow -2(D - x_2^0) - \frac{3D}{4} + x_2^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_2^0 = \frac{11D}{4} \quad \Leftrightarrow x_2^0 = \frac{11D}{12} \quad (4)$$

$$\therefore x_1^0 = \frac{D}{12}$$

(b) Consideramos las perturbaciones δx_i como

$$x_1(t) = D/12 + \delta x_1(t), \quad x_2(t) = 11D/12 + \delta x_2(t)$$

donde $|\delta x_i| \ll 1$. Para las velocidades tenemos

$$\dot{x}_1 = \delta \dot{x}_1, \quad \dot{x}_2 = \delta \dot{x}_2$$

ahora reemplazamos en el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} (\delta x_1 - D/6)^2 - \frac{k}{2} (-\delta x_1 + \delta x_2 - 13D/12)^2 - \frac{k}{2} (\delta x_2 - D/6)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} \left[\delta x_1^2 - \delta x_1 D/3 + a + \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + 13 \delta x_1 D/6 - 13 \delta x_2 D/6 + b + \delta x_2^2 - \delta x_2 D/3 + c - 2 \delta x_1 \delta x_2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \delta \dot{x}_2^2 - k \left[\delta x_1^2 + \delta x_2^2 - \delta x_1 \delta x_2 \right] + \delta x_1 \cdot d + \delta x_2 \cdot e + f = 0$$

donde a, b, c, d, e, f son ctes conocidas, pero no nos interesan, ya que el término f no aparecerá en las ecs. de mov. y las contribuciones $\delta x_1 \cdot d + \delta x_2 \cdot e$ otorgarán ctes. a las ecs. de mov. por lo que las podríamos hacer desaparecer con un c.v. correspondiente y no cambia la dinámica (recordar Ejerc. 3)

así que el Lagrangiano que nos interesa es

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - k (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)$$

(c) Calculamos las dos ecs. de E-L

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2k x_1 + k x_2 \quad \triangleright \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1$$

$$\therefore m \ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = 0$$

$$\triangleright \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2k x_2 + k x_1 \quad \triangleright \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m \dot{x}_2$$

$$\therefore m \ddot{x}_2 + 2k x_2 - k x_1 = 0$$