

Ejercicio 6

(a) Tenemos la energía de la forma $E = \frac{1}{2} p(q) \dot{q}^2 + u(q)$, derivando se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \dot{p}(q) \dot{q} + \frac{1}{2} p(q) \ddot{q} + \dot{u}$$

regla de la cadena

$$= \frac{1}{2} p'(q) \dot{q}^2 + \frac{1}{2} p(q) \ddot{q} + u' \dot{q} \stackrel{!}{=} 0, \text{ donde } ' = \frac{\partial}{\partial q}$$

(b) Definimos $q = q_e + \delta q$ + q $u'(q_e) = 0$, reemplazamos

$$\Rightarrow \frac{1}{2} p'(q_e + \delta q) \dot{\delta q}^2 + \frac{1}{2} p(q_e + \delta q) \ddot{\delta q} + u'(q_e + \delta q) \dot{\delta q} = 0$$

expandemos en Taylor $p(q_e + \delta q) = p(q_e) + p'(q_e) \delta q + \dots$ y $u'(q_e + \delta q) = \cancel{u'(q_e)} + u''(q_e) \delta q + \dots$ = 0 por def

además despreciamos el término $\delta \dot{q}^2$ al ser de segundo orden

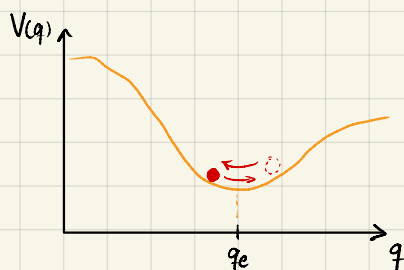
$$\approx \frac{1}{2} (p(q_e) + \cancel{p'(q_e) \delta q} \text{ \delta q \delta q \text{ segundo orden}}) \ddot{\delta q} + u''(q_e) \delta q = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta q} + \frac{2 u''(q_e)}{p(q_e)} \delta q = 0 \Leftrightarrow \ddot{\delta q} = - \frac{2 u''(q_e)}{p(q_e)} \delta q$$

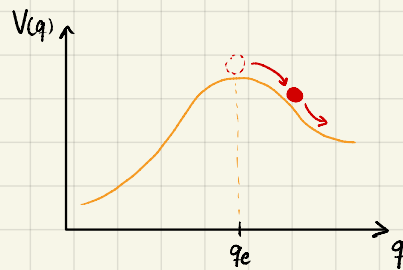
Por segunda Ley de Newton $m \ddot{q} = \sum F$, entonces

$$F \propto - \frac{u''(q_e)}{p(q_e)}$$

como $p(x) > 0$, si $u''(q_e) > 0$ la "fuerza" sería atractiva, por lo que siempre que la partícula se aleje (un poco) de q_e , será atraída nuevamente con lo que tendríamos un pto. de equilibrio estable. Mientras que si $u''(q_e) < 0$ la "fuerza" tendería a alejar a la partícula de q_e y entre más lejos, más fuerte la aleja, así que sería un pto. de equilibrio inestable.



Caso $u''(q_e) > 0$



Caso $u''(q_e) < 0$

También lo podrían ver solucionando la EDO que nos quedó, usando el ansatz $8q(t) \propto e^{wt}$, donde

- $u''(q_e) > 0 \longrightarrow w \in \mathbb{C} \therefore$ Mov. oscilatorio
- $u''(q_e) < 0 \longrightarrow w \in \mathbb{R} \therefore 8q(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ o } \infty$

Reemplacemos el ansatz en la EOM

$$\Rightarrow w^2 e^{wt} + \frac{2u''(q_e)}{f(q_e)} e^{wt} = 0 \quad / \cdot e^{-wt}$$

$$\Rightarrow w_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{2u''(q_e)}{f(q_e)}} \quad \therefore 8q(t) = A e^{w_1 t} + B e^{w_2 t}$$

donde comprobamos lo mencionado sobre la estabilidad