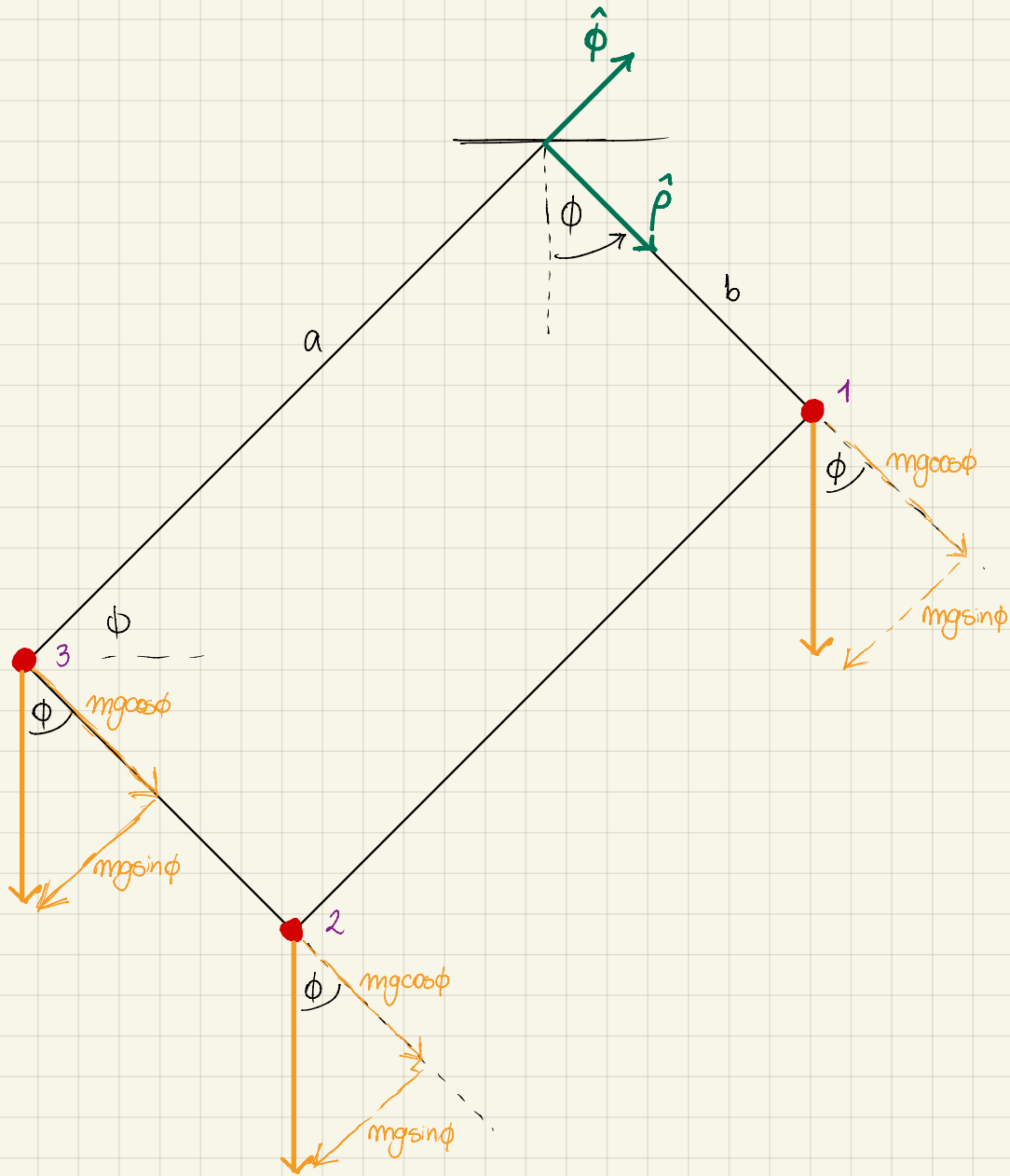


Auxiliar 17

P1



Sabemos que con la ecuación maestra

$$\vec{T}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$$

conseguiremos la ec. de mov. para el ángulo ϕ y con esto podremos hacer Taylor (si es que es necesario) y conseguir la ec. de mov. de un oscilador armónico donde podremos identificar la frecuencia de pequeñas oscilaciones

Primero definamos la posición de cada masa ocupando un sist. cilíndrico centrado en el pivote

$$\triangleright \vec{r}_1 = b\hat{\rho} \quad \triangleright \vec{r}_2 = b\hat{\rho} - a\hat{\phi} \quad \triangleright \vec{r}_3 = -a\hat{\phi}$$

con esto podemos calcular las velocidades derivando una vez

$$\triangleright \vec{v}_1 = b\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\triangleright \vec{v}_2 = b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{r}$$

$$\triangleright \vec{v}_3 = a\dot{\phi}\hat{r}$$

así que los momentums angular serían ($\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$)

$$\square \vec{L}_1 = m b\hat{r} \times (b\dot{\phi}\hat{\phi}) = mb^2\dot{\phi}\hat{k}$$

$$\square \vec{L}_2 = m(b\hat{r} - a\hat{\phi}) \times (b\dot{\phi}\hat{\phi} + a\dot{\phi}\hat{r}) = m(b^2 + a^2)\dot{\phi}\hat{k}$$

$$\square \vec{L}_3 = m \cdot (-a\hat{\phi}) \times (a\dot{\phi}\hat{r}) = ma^2\dot{\phi}\hat{k}$$

$$\therefore \vec{L}_{\text{tot}} = m(2b^2 + 2a^2)\dot{\phi}\hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = 2m(a^2 + b^2)\ddot{\phi}\hat{k}$$

Ahora calculemos los torques. Notemos que como ocupamos el mismo sist. de coord. para las 3 partículas, la fuerza peso para las 3 partículas es:

$$m\vec{g} = mg\cos\phi\hat{r} - mg\sin\phi\hat{\phi}$$

así que los torques ($\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$) serían

$$\square \vec{\tau}_1 = b\hat{r} \times (mg\cos\phi\hat{r} - mg\sin\phi\hat{\phi}) = -mgbsin\phi\hat{k}$$

$$\square \vec{\tau}_2 = (b\hat{r} - a\hat{\phi}) \times (mg\cos\phi\hat{r} - mg\sin\phi\hat{\phi}) = -mgbsin\phi\hat{k} + mga\cos\phi\hat{k}$$

$$\square \vec{\tau}_3 = -a\hat{\phi} \times (mg\cos\phi\hat{r} - mg\sin\phi\hat{\phi}) = mga\cos\phi\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\tau}_{\text{tot}} = 2mga\cos\phi\hat{k} - 2mgbsin\phi\hat{k}$$

Así que la ec. maestra quedaría como

$$\vec{\tau}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow 2mga\cos\phi\hat{k} - 2mgbsin\phi\hat{k} = 2m(a^2 + b^2)\ddot{\phi}\hat{k}$$

$$\Rightarrow ga\cos\phi - gb\sin\phi = (a^2 + b^2)\ddot{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\phi} = \frac{ga\cos\phi - gb\sin\phi}{a^2 + b^2}$$

b) A hora, los puntos de equilibrio se dan donde la suma de fuerzas es 0 (por eso $\partial U/\partial q = 0$), o sea que la aceleración en ese eje sea 0 (por Newton), entonces imponemos que $\ddot{\phi} = 0$ y despejamos ϕ_{eq} que cumpla eso

$$\Rightarrow 0 = \frac{ga\cos\phi_{eq} - gb\sin\phi_{eq}}{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a\cos\phi_{eq} = b\sin\phi_{eq} \Leftrightarrow \tan\phi_{eq} = \frac{a}{b}$$

y por enunciado nos dicen que consideremos $a = \sqrt{3} \cdot b$

$$\Rightarrow \tan \phi_{eq} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \phi_{eq} = \frac{\pi}{3}$$

c) Ya tenemos el pto. de equil., así que calculemos la frecuencia de pequeñas oscilaciones. Tenemos la EDO

$$\ddot{\phi} = \frac{ga}{c^2} \cos \phi - \frac{gb}{c^2} \cos \phi, \text{ donde definí } c^2 = a^2 + b^2$$

entonces debemos considerar una pequeña variación en torno al ángulo de equil., o sea algo como

$$\phi(t) = \frac{\pi}{3} + \delta(t), \text{ donde } \delta \ll 1 \quad (\text{una pequeña variación})$$

Ojo que γ sería variable. Entonces reemplacemos en la EDO

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{3} + \delta(t) \right) = \frac{ga}{c^2} \cos(\pi/3 + \delta) - \frac{gb}{c^2} \sin(\pi/3 + \delta) \quad (*)$$

donde el primer término solo quedaría como $\ddot{\delta}(t)$, y para las funciones trigonom. usamos las propiedades

$$\bullet \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\bullet \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

entonces

$$\triangleright \cos(\pi/3 + \delta) = \cos(\pi/3)\cos(\delta) - \sin(\pi/3)\sin(\delta) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta$$

$$\triangleright \sin(\pi/3 + \delta) = \sin(\pi/3)\cos(\delta) + \cos(\pi/3)\sin(\delta) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \delta$$

donde en el último paso usamos la aproximación $\cos(\delta) \approx 1$ y $\sin(\delta) \approx \delta$ ya que $\delta \ll 1$. Reemplazamos en (*)

$$\Rightarrow \ddot{\delta} = \frac{ga}{c^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta \right) - \frac{gb}{c^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \delta \right)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta} = - \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{gb}{c^2} \right] \delta + \frac{ga}{2c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{gb}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\delta} = -\omega_0^2 \delta + \frac{ga}{c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{gb}{c^2}, \text{ donde definí } \omega_0^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{gb}{c^2} \right]$$

y si hacemos el c.p. $\tilde{\delta} = \delta - \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{ga}{c^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{gb}{c^2} \right] \Rightarrow \ddot{\tilde{\delta}} = \ddot{\delta}$ y la EDO que nos queda es

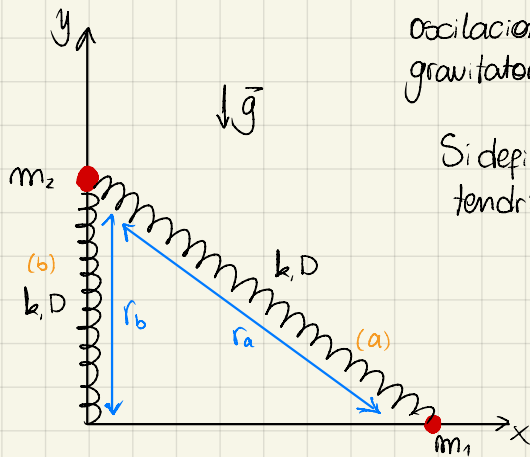
$$\ddot{\tilde{s}} = -\omega_0^2 \tilde{s}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\tilde{s}} + \omega_0^2 \tilde{s} = 0$$

que es la EDO de un oscilador armónico con frecuencia de oscilación $\omega_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{ga}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{gb}{c^2}}$ que sería nuestra frecuencia de pequeñas oscilaciones.

P2

Como han visto en clases, podemos encontrar la ec. de mov. para pequeñas oscilaciones ocupando el potencial. Tenemos el potencial elástico y el gravitatorio.



Si definimos el potencial gravitatorio como 0 en la altura $y=0$, solo la masa m_2 tendría este potencial distinto de 0

$$\Rightarrow U_g = m_2 g y_2 \quad (1)$$

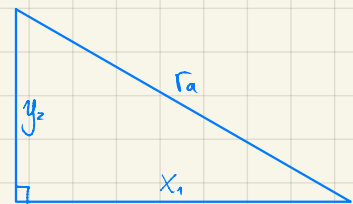
donde definimos las coordenadas de m_1 con $(x_1, y_1) = (x_1, 0)$ y para m_2 con $(x_2, y_2) = (0, y_2)$

Ahora, tenemos dos resortes por lo que tenemos dos contribuciones al potencial elástico

$$U_e = \frac{1}{2} k (r_a - D)^2 + \frac{1}{2} k (r_b - D)^2$$

donde $r_b = y_2$ y r_a lo podemos calcular con pitágoras

$$r_a = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$$



$$\therefore U_e(x_1, y_2) = \frac{1}{2} k (\sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D)^2 + \frac{1}{2} k (y_2 - D)^2 \quad (2)$$

Ahora calculemos los puntos de equilibrio que deben satisfacer

$$\frac{\partial U_{\text{tot}}(x_1, y_2)}{\partial x_1} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial U_{\text{tot}}(x_1, y_2)}{\partial y_2} = 0 \quad (3)$$

ya que hay dos grados de libertad. Ocupando (1) y (2) en (3)

$$\square \frac{\partial U_{\text{tot}}(x_1, y_2)}{\partial x_1} = k (\sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D) \frac{x_1}{(\sqrt{x_1^2 + y_2^2})^{3/2}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$\square \frac{\partial U_{\text{tot}}(x_1, y_2)}{\partial y_2} = k (\sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D) \frac{y_2}{(\sqrt{x_1^2 + y_2^2})^{3/2}} + k (y_2 - D) + m_2 g \stackrel{!}{=} 0 \quad (5)$$

Resolviendo esto al gijmetro, notamos que si los últimos dos términos en (5) los igualo a 0, osea

$$k (y_2 - D) + m_2 g \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow y_2 = -\frac{m_2 g}{k} + D$$

entonces para este y_2 el primer término de (5) también tiene que ser 0

$$k(\sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D) \frac{y_2}{(x_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_2^2} - D = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \sqrt{D^2 - y_2^2}$$

$$= \sqrt{D^2 - (m_2 g / k + D)^2}$$

que notamos que también soluciona (4), por lo que este punto sería un pto. de equilibrio

$$\Rightarrow (x_{1,e}, y_{2,e}) = (\sqrt{D^2 - (m_2 g / k + D)^2}, -m_2 g / k + D)$$

Ahora calculamos las segundas derivadas y evaluamos en $(x_{1,e}, y_{2,e})$ (hagámoslo ustedes, no me pagan tanto)

$$\triangleright \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x_1^2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} = \frac{m_2 g (D + y_{2,e})}{D^2}$$

$$\triangleright \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial y_2^2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} = \frac{k(x_{1,e}^2 + 2y_{2,e}^2)}{D^2}$$

$$\triangleright \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x_1 \partial y_2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} = \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial y_2 \partial x_1} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} = \frac{k x_{1,e} y_{2,e}}{D^2}$$

Entonces, reemplazamos en $m \vec{r}_i + \nabla U = 0$, usando

$$U(x_1, y_2) = U(x_{1,e}, y_{2,e}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x_1^2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} (x_1 - x_{1,e})^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial y_2^2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} (y_2 - y_{2,e})^2$$

$$+ \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x_1 \partial y_2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} (x_1 - x_{1,e})(y_2 - y_{2,e})$$

donde para considerar pequeñas oscilaciones hacemos $x_1 = x_{1,e} + \delta x_1$ ^ $y_2 = y_{2,e} + \delta y_2$

$$\Rightarrow U(x_1, y_2) \approx U(x_{1,e}, y_{2,e}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x_1^2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} \delta x_1^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial y_2^2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} \delta y_2^2$$

$$+ \left. \frac{\partial^2 U_{\text{tot}}}{\partial x_1 \partial y_2} \right|_{(x_1, y_2) = (x_{1,e}, y_{2,e})} \delta x_1 \delta y_2 \quad (6)$$

y las ecs. de movimiento serían

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + \nabla U = 0$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{s}x_1 + \frac{\partial U(sx_1, sy_1)}{\partial (sx_1)} = 0$$

dependencia. NO está multiplicando

$$(6): m_1 \ddot{s}x_1 + \left. \frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1^2} \right|_{(x_1, y_1) = (x_{1e}, y_{1e})} sx_1 + \left. \frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_1 \partial y_1} \right|_{(x_1, y_1) = (x_{1e}, y_{1e})} sy_1 = 0 \quad (7)$$

y para m_2 , $m_2 \ddot{\vec{r}}_2 + \nabla U = 0$

$$\Rightarrow m_2 \ddot{s}y_2 + \frac{\partial U(sx_2, sy_2)}{\partial (sy_2)} = 0$$

$$(6): m_2 \ddot{s}y_2 + \left. \frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial y_2^2} \right|_{(x_2, y_2) = (x_{2e}, y_{2e})} sy_2 + \left. \frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial x_2 \partial y_2} \right|_{(x_2, y_2) = (x_{2e}, y_{2e})} sx_2 = 0 \quad (8)$$

donde (7) y (8) son las ecs. de mov. que gobiernan nuestro sist. y las derivadas ya fueron calculadas