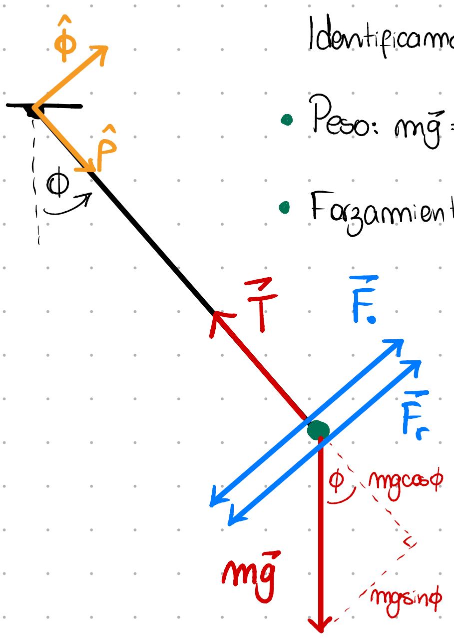
Auxiliar 15

P1



Identificamos las fuerzas de nuestro problema

- Peso: $m\vec g = mg\cos\phi\,\hat\rho - mg\sin\phi\,\hat\phi$
- Forzamiento: $\vec F_o = F_o\sin(\omega t)\hat\phi$
- Roce viscoso: $\vec F_r = -c\vec v = -c(\cancel{\dot\rho\hat\rho} + \overset{\overset{R}{\uparrow}}{\rho}\dot\phi\hat\phi) = -cR\dot\phi\hat\phi$
- Tensión: $\vec T = -T\hat\rho$

Así que la ec. de mov. vectorial, ocupando coord. polares, sería:

$$m((\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\hat\rho + (2\dot\rho\dot\phi + \rho\ddot\phi)\hat\phi) = mg\cos\phi\,\hat\rho - mg\sin\phi\,\hat\phi$$
$$+ F_o\sin(\omega t)\hat\phi - cR\dot\phi\hat\phi - T\hat\rho$$

y las ecs. de mov. escalares serían

$$\hat\rho)\ -mR\dot\phi^2 = mg\cos\phi - T$$

$$\hat\phi)\ mR\ddot\phi = -mg\sin\phi + F_o\sin(\omega t) - cR\dot\phi$$

donde en $\hat\phi)$ tenemos casi una EDO lineal, a excepción del $\sin\phi$, pero si consideramos pequeñas oscilaciones en torno a la vertical, o sea $\phi \ll 1 \Rightarrow \sin\phi \approx \phi$

$$\Rightarrow \ddot\phi + \frac{c}{m}\dot\phi + \frac{g}{R}\phi = \frac{F_o}{mR}\sin(\omega t)$$

Con lo que conseguimos la EDO de nuestro balanceo y que podemos resolver.

P2

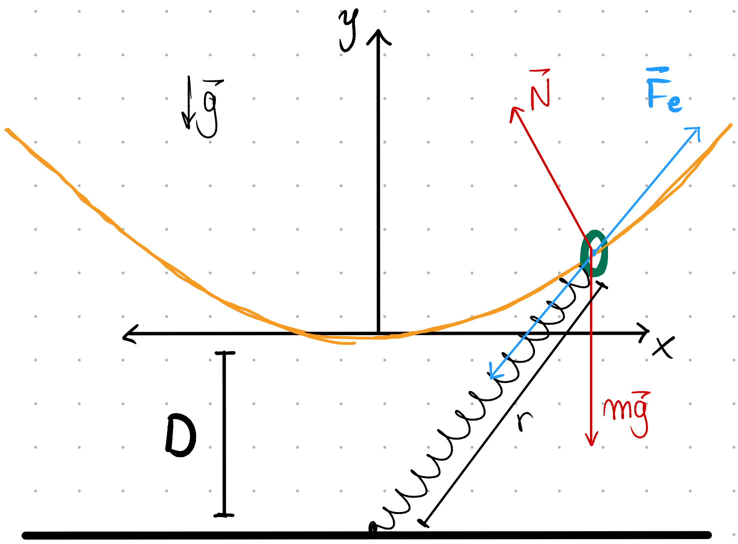


Figura 1: Problema

Primero identificamos las fuerzas

- Elástica: Conservativa
- Peso: Conservativa
- Normal: No conservativa, pero no ejerce trabajo

Por lo tanto se conserva la energía mecánica, donde tendríamos dos energías potenciales.

Calculemos la distancia del origen del resorte a la partícula para poder escribir la potencial elástica

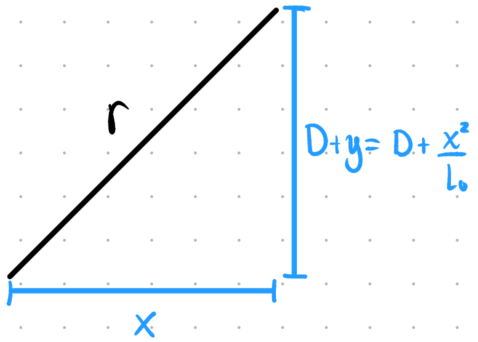


Fig 2: Expresión de r

Por Fig 2 tenemos

usando $D = 2l_0$

$$r^2 = x^2 + \left(D + \frac{x^2}{l_0}\right)^2 = \frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2$$

por lo que la potencial elástica sería

$$U_e = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2$$

mientras que la potencial gravitatoria sería $U_p = mgz = mg\frac{x^2}{l_0}$.

Así que la energía mecánica, que se conserva, sería

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + U_e(x) + U_p(x) \quad \text{, usando cartesianas}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2 + \frac{mg}{l_0}x^2 \quad (1)$$

a) Ocupemos que $E_0 = E_f$ donde E_0 es la energía en el momento inicial, en el cuál

- $x_0 = y_0 = 0$ y $|\vec{v}_0| = v_0$

mientras que E_f es en el tiempo "final" donde la partícula debe detenerse (al ser la altura máxima) al alcanzar una altura D

- $y_f = D = 2l_0 \Rightarrow x_f = \sqrt{2l_0^2}$ y $|\vec{v}_f| = 0$

reemplazando en (1)

$$E_0 = E_f$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{4l_0^2} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\frac{4l_0^4}{l_0^2} + 10 l_0^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2 + \frac{mg}{l_0} 2l_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k l_0^2 = \frac{1}{2} k \left(l_0\sqrt{18} - l_0\right)^2 + 2mgl_0$$

$$\Rightarrow v_0 = \left(\frac{k}{m} l_0^2 (\sqrt{18} - 1)^2 + 2mgl_0 - \frac{1}{2} k l_0^2\right)^{1/2}$$

b) Tenemos que el potencial total es

$$U_{tot} = U_e + U_p = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{\frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right)^2 + \frac{mg}{l_0} x^2$$

para identificar puntos de equilibrio derivamos con respecto a la coordenada

$$\frac{\partial U_{tot}(x)}{\partial x} = k \left(\sqrt{\frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right) \frac{4x^3/l_0^2 + 10x}{(x^4/l_0^2 + 5x^2 + 4l_0^2)^{1/2}} \frac{1}{2} + \frac{2mg}{l_0} x$$

y notamos que evaluando en $x=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial U_{tot}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, así que $(0,0)$ es punto de equilibrio

$$\frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} = \frac{2mg}{l_0} + k \frac{4x^3/l_0^2 + 10x}{(x^4/l_0^2 + 5x^2 + 4l_0^2)^{1/2}} \frac{4x^3/l_0^2 + 10x}{(x^4/l_0^2 + 5x^2 + 4l_0^2)^{1/2}} \frac{1}{4}$$

$$+ k \left(\sqrt{\frac{x^4}{l_0^2} + 5x^2 + 4l_0^2} - l_0\right) \left[(12x^2/l_0^2 + 10)(x^4/l_0^2 + 5x^2 + 4l_0^2)^{1/2} - \frac{(4x^3/l_0^2 + 10x)}{(x^4/l_0^2 + 5x^2 + 4l_0^2)^{1/2}} \frac{(4x^3/l_0^2 + 10x)}{2} \right]$$

$$\times \frac{1}{x^4/l_0^2 + 5x^2 + 4l_0^2} \frac{1}{2}$$

evaluando en $x=0$ esta segunda derivada

$$\left.\frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \frac{2mg}{l_0} + k l_0 \left[\frac{10 \cdot 2l_0}{4l_0^2 \cdot 2}\right] = \frac{2mg}{l_0} + \frac{5k}{2} > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ es equilibrio estable}$$

c) Como nuestra energía es de la forma $E = \frac{1}{2} m v^2 + U$, la frecuencia de pequeñas oscilaciones es

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l_0} + \frac{5}{2}\frac{k}{m}}$$

P3

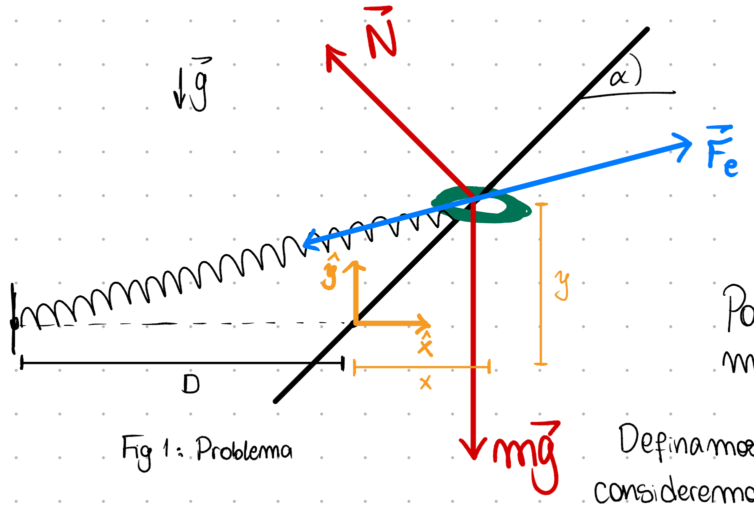


Fig 1: Problema

Identificamos las fuerzas

- Elástica: Conservativa
- Peso: Conservativa
- Normal: No conservativa, pero no ejerce trabajo

Por lo tanto se conserva la energía mecánica, donde tendríamos dos energías potenciales.

Definamos r como la distancia entre el punto P y la partícula, además consideremos la altura como 0 a la altura del punto P

La posición y está dada por la posición en x, de la forma $y = \tan(\alpha)\cdot x$, por lo que r estaría dado por

$$\Rightarrow r^2 = (D+x)^2 + y^2 = D^2 + 2Dx + x^2 + \tan^2(\alpha)\, x^2 = D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2\alpha}$$

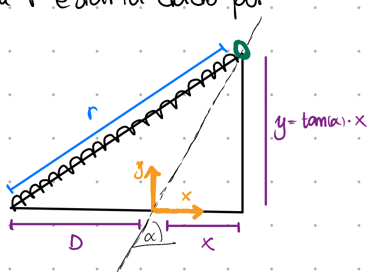


Fig 2: Descomposición de la distancia r

así que la energía mecánica sería

$$E = \frac{1}{2} m|\vec{v}|^2 + U_e + U_P = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + \frac{1}{2} k (r-\ell)^2 + mgy$$

$$= \frac{1}{2} m|\vec{v}|^2 + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2\alpha}} - \ell \right)^2 + mg\tan\alpha \cdot x$$

a) Como queremos encontrar ptos de equilibrio, derivamos

$$\frac{\partial U_{tot}(x)}{\partial x} = \frac{\partial U_e(x)}{\partial x} + \frac{\partial U_P(x)}{\partial x} = k\left(\sqrt{D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2\alpha}} - \ell \right) \frac{2D + 2x/\cos^2\alpha}{(D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2\alpha)^{1/2}} \frac{1}{2} + mg\tan\alpha$$

Evaluando en $x=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial U_{tot}}{\partial x}\right|_{x=0} = k(D-\ell)\frac{\cancel{D}}{\cancel{D}} + mg\tan\alpha = kD - k\ell + mg\tan\alpha$

como queremos que sea un punto de equilibrio, imponemos $U'(x=0) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow D = \ell - \frac{mg}{k}\tan(\alpha)$$

b) Para determinar el tipo de equilibrio, calculamos la segunda derivada del potencial

$$\frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2} = k \frac{(2D + 2x/\cos^2\alpha)^2}{D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2\alpha} \cdot \frac{1}{4}$$

$$+ k\left(\sqrt{D^2 + 2Dx + \frac{x^2}{\cos^2\alpha}} - \ell \right) \left[2/\cos^2\alpha\, (D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2\alpha)^{1/2} - \frac{(2D + 2x/\cos^2\alpha)^2}{(D^2+2Dx+x^2/\cos^2\alpha)^{1/2}} \frac{1}{2} \right] \frac{1}{D^2 + 2Dx + x^2/\cos^2\alpha} \frac{1}{2}$$

walvamdo esto en $x=0$ (nuestro pto. de equilibrio)

$$\left.\frac{\partial^2 U_{tot}(x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = k \cdot \frac{D^2}{D^2} + k(D-\ell)\left[\frac{2D}{\cos^2\alpha} - \frac{2D^2}{D}\right]\frac{1}{2D^2}$$

$$= k + \frac{k}{D}(D-\ell)\left[\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right]$$

$$= k + \left(k - \frac{kl}{l - mg\tan(\alpha)/k}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right]$$, usando que $\cos^2(30°) = \frac{3}{4}$, $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ^ $mg = kl$

$$= k + \left(k - \frac{kl}{l - kl\sqrt{3}/3k}\right)\left[\frac{4}{3} - 1\right]$$

$$= k + k\left(1 - \frac{1}{1-\sqrt{3}/3}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$= k - k\,\frac{\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}/3} \cdot \frac{1}{3} \approx 0.54 \cdot k > 0$$

$\therefore$ Cuando $\alpha = 30°$ y $mg = kl$, $x=0$ es un pto. de equilibrio estable