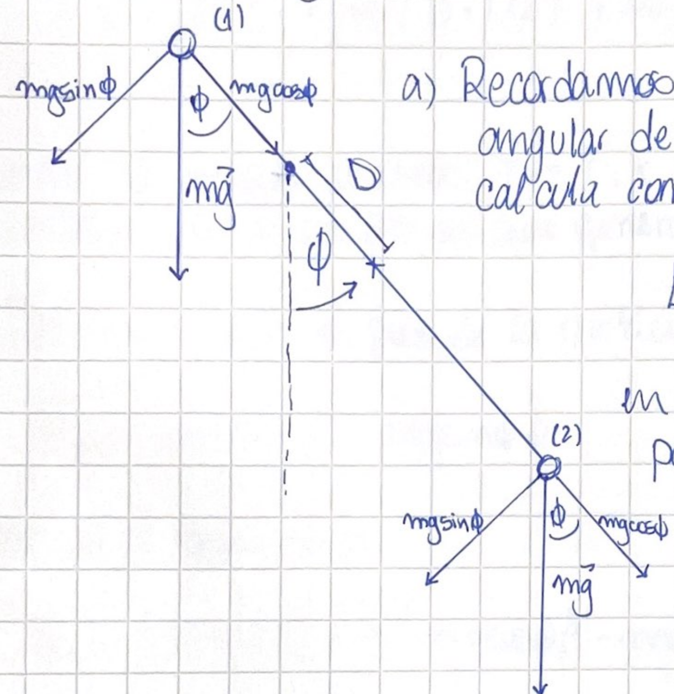
Ejercicio 4: Torque



a) Recordamos que el momentum angular de cada partícula se calcula como

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

en este problema ambas partículas giran sin cambiar su distancia al origen, por lo que las velocidades en cilíndricas serían

$$\vec{v} = \cancel{\dot{\rho}\hat{\rho}} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} = \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$$

entonces, para (2) tendríamos $\vec{r}_2 = (D + L/2)\hat{\rho}$

$$\Rightarrow \vec{L}_2 = m(D+L/2)\hat{\rho} \times (D+L/2)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$= m(D+L/2)^2\dot{\phi}\hat{k}$$

y para (1) $\vec{r}_1 = (-D + L/2)\hat{\rho}$

$$\Rightarrow \vec{L}_1 = m(L/2-D)\hat{\rho} \times (L/2-D)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$= m(L/2-D)^2\dot{\phi}\hat{k}$$

así que el momentum angular del sistema sería

$$\vec{L}_{TOT} = \sum_i \vec{L}_i = \left[m\left(D + L/2\right)^2 + m\left(L/2 - D\right)^2 \right] \dot{\phi}\,\hat{k}$$

b) Para los torques usamos $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, donde para ambas masas, las únicas fuerzas que generan torque es el peso

Descomponiendo el peso de la partícula (2)

$$\vec{F}_{p2} = mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}$$

así que el torque sería

$$\vec{\tau}_2 = \left(D + L/2\right)\hat{\rho} \times \left(mg\cos\phi\,\hat{\rho} - mg\sin\phi\,\hat{\phi}\right)$$

$$= -mg\left(D + L/2\right)\sin\phi\,\hat{k}$$

y para la partícula (1)

$$\vec{F}_{p1} = -mg\cos\phi\,\hat{\rho} + mg\sin\phi\,\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_1 = \left(L/2 - D\right)\hat{\rho} \times \left(-mg\cos\phi\,\hat{\rho} + mg\sin\phi\,\hat{\phi}\right)$$

$$= mg\left(L/2 - D\right)\sin\phi\,\hat{k}$$

Así que el torque total sería

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_i \vec{\tau}_i = \left[-mg\left(D + L/2\right) + mg\left(L/2 - D\right)\right]\sin\phi\,\hat{k}$$

c) Ocupamos la ec. maestra

$$\vec{\tau}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow -2mgD\sin\phi\,\hat{k} = m\left[2D^2 + L^2/2\right]\ddot{\phi}\,\hat{k}$$

tomando solo la parte escalar

$$\Rightarrow \left[2D^2 + L^2/2\right]\ddot{\phi} = -2gD\sin\phi$$

con lo que encontramos nuestra ec. de movimiento