

Pauta Auxiliar 13

Energía II

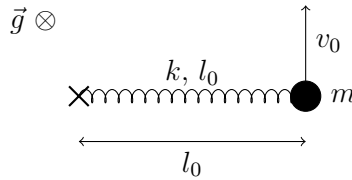
Profesor: Gonzalo Palma

Auxiliares: Francisco Colipí, Javier Huenupi

Ayudante: Gabriel Marin, Valentina Suárez

P1.-

Sobre una superficie horizontal sin roce una partícula de masa m se mueve ligada a un punto fijo mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0 . En el instante mostrado en la figura su velocidad tiene magnitud v_0 y es perpendicular al resorte, el cual se encuentra en su largo natural. Determine el valor de v_0 tal que la máxima longitud que el resorte alcance sea $4l_0$. Determine también la máxima y mínima rapidez de la partícula en el movimiento resultante.



Respuesta

Para este problema usamos la conservación de la energía mecánica, ya que no hay fuerzas disipativas, además tenemos que se conserva el momentum angular, debido a que no hay fuerzas actuando en $\hat{\phi}$, o sea, que usando coordenadas polares se tiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{\phi})}{dt} = 0 \Rightarrow \rho^2 \dot{\phi} = \text{constante}.$$

Como en un primer instante el resorte se encuentra en su largo natural ($\rho_0 = l_0 \Rightarrow U_0 = 0$), solo hay energía cinética dada por la velocidad v_0 , así que la energía mecánica inicial sería:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Además, por conservación del momentum angular tenemos que $\rho^2 \dot{\phi} = l_0 v_0$.

Para este caso, la energía mecánica de forma general está dada, en coordenadas polares, por:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\rho) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\phi})^2) + \frac{1}{2} k (\rho - l_0)^2.$$

Sabemos que en el momento en el que el resorte alcance su máxima elongación, la masa se detiene en el eje radial (deja de alejarse), o sea, $\dot{\rho} = 0$ en ese instante, así que utilizando que la posición en

este caso es $4l_0$ y utilizando la conservación del momentum angular, obtenemos que la energía en el instante de máxima elongación es:

$$E_f = \frac{1}{2}m \left(\frac{l_0 v_0}{4l_0} \right)^2 + \frac{9}{2}kl_0^2,$$

que tiene que ser igual a la energía inicial $E_0 = E_f$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{32}mv_0^2 + \frac{9}{2}kl_0^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \Rightarrow v_0^2 &= \frac{48}{5} \frac{k}{m} l_0^2. \end{aligned}$$

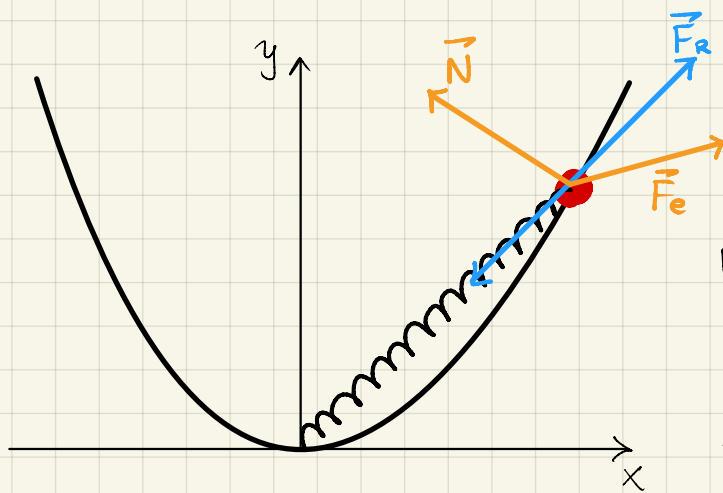
Para calcular la velocidad máxima del movimiento pensamos en que cuando se conserva la energía total se genera un equilibrio entre la energía cinética y la potencial (sumadas deben dar E), entonces la energía cinética (la velocidad) alcanza su máximo valor cuando la energía potencial alcanza su valor mínimo, en este caso eso sucede cuando el resorte está en su largo natural ($U(\rho = l_0) = 0$) donde sabemos que la velocidad es v_0 ,

$$\Rightarrow v_{\text{máx}} = v_0.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la energía cinética toma su valor mínimo cuando la potencial alcanza su valor máximo, que para la velocidad v_0 calculada, la elongación máxima es $4l_0$, así que ocupamos que la energía total inicial es igual a la energía mecánica cuando la velocidad es mínima,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv_{\text{mín}}^2 + \frac{9}{2}kl_0^2 \\ \Rightarrow v_{\text{mín}}^2 &= \frac{3}{5} \frac{k}{m} l_0^2 \end{aligned}$$

P2



- a) Las fuerzas que no ejercen trabajo son las que son perpendiculares a la trayectoria de la partícula. En este caso la normal siempre es perpendicular a la trayectoria, mientras que las otras fuerzas tienen componentes en la trayectoria, así que $\vec{F}_R$ y $\vec{F}_E$ sí ejercen trabajo

- b) El vector posición de la partícula está dada por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = x\hat{i} + \frac{x^2}{x_0}\hat{j}$$

y en la fórmula del trabajo necesitamos el diferencial

$$\Rightarrow d\vec{r} = dx\hat{i} + \frac{2x}{x_0}dx\hat{j}$$

Calculemos el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}_E$ desde

$$\vec{r}_A = x_0\hat{i} + \frac{x_0^2}{x_0}\hat{j} = x_0\hat{i} + x_0\hat{j} \text{ hasta } \vec{r}_B = \lambda x_0\hat{i} + \lambda^2 x_0\hat{j}.$$

Primero expresemos $\vec{F}_E$ en función solo de x usando $y = x^2/x_0$.

$$\vec{F}_E = \frac{k}{x_0} \left(\frac{x^3}{x_0}\hat{i} + \frac{3}{4}x^2\hat{j} \right)$$

entonces el trabajo es

$$\begin{aligned} W_E &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_E(\vec{x}) \cdot d\vec{r} = \int_{x_0}^{\lambda x_0} \frac{k}{x_0} \left(\frac{x^3}{x_0}\hat{i} + \frac{3}{4}x^2\hat{j} \right) \cdot \left(dx\hat{i} + \frac{2x}{x_0}dx\hat{j} \right) \\ &= \int_{x_0}^{\lambda x_0} \left[\frac{kx^3}{x_0^2} dx + \frac{3}{2} \frac{k}{x_0} \frac{x^3}{x_0^2} dx \right] \\ &= \int_{x_0}^{\lambda x_0} \frac{5}{2} \frac{k}{x_0^2} x^3 dx = \frac{5}{2} \frac{k}{x_0^2} \frac{x^4}{4} \Big|_{x_0}^{\lambda x_0} = \frac{5}{8} k x_0^2 (\lambda^4 - 1) \end{aligned}$$

Debido a que la fuerza del resorte tiene una forma "complicada" (inténtemlo) para calcular el trabajo con la fórmula integral, podemos usar la fórmula del trabajo para fuerzas conservativas ($\vec{F}_R$ es fuerza central, así que es conservativa)

$$W_c = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = U_c(\vec{r}_A) - U_c(\vec{r}_B)$$

↖ ojo con el orden

Sabemos que el potencial de la fuerza del resorte es $U_r(r) = \frac{1}{2} k(r-l_0)^2$ donde r es la distancia desde el origen a la partícula

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{x_0^2}}$$

Evaluando en $x_A = x_0$ y $x_B = \lambda x_0$ en el potencial

$$\left. \begin{aligned} \triangleright U_r(x_A) &= \frac{1}{2} k(\sqrt{x_0^2 + x_0^2})^2 = k x_0^2 \\ \triangleright U_r(x_B) &= \frac{1}{2} k(\lambda^2 x_0^2 + \lambda^4 x_0^2) = \frac{1}{2} k x_0^2 (\lambda^2 + \lambda^4) \end{aligned} \right\} W_R = U_r(x_A) - U_r(x_B) = k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 (\lambda^2 + \lambda^4)$$

$$\begin{aligned} \text{Así que el trabajo total es la suma } W_{\text{tot}} = W_E + W_R &= \frac{5}{8} k x_0^2 (\lambda^4 - 1) + k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 (\lambda^2 + \lambda^4) \\ &= \frac{1}{8} k x_0^2 \lambda^4 + \frac{3}{8} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 \lambda^2 \end{aligned}$$

c) Recordemos la fórmula del trabajo total

$$W_{\text{tot}} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K(r_B) - K(r_A)$$

donde notamos que cuando $W_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow K(r_B) = K(r_A)$ que en nuestro caso sería $K(\lambda x_0) = K(x_0)$ o sea, que podemos despejar los λ^* que cumplen que $W_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow$ la partícula en $x = \lambda^* x_0$ tenga la misma energía cinética que en $x = x_0$, o sea tengamos la misma rapidez (que es lo que buscamos)

$$\Rightarrow W_{\text{tot}}(\lambda^*) = \frac{1}{8} k x_0^2 \lambda^{*4} + \frac{3}{8} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 \lambda^{*2} \stackrel{!}{=} 0$$

donde si hacemos el c.v. $\tilde{\lambda} = \lambda^{*2}$ tenemos una ec cuadrática

$$\Rightarrow \frac{1}{8} k x_0^2 \tilde{\lambda}^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 \tilde{\lambda} + \frac{3}{8} k x_0^2 = 0 \quad / \cdot \frac{8}{k x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\lambda}^2 - 4\tilde{\lambda} + 3 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1$$

Así que los λ^* que cumplen $W_{\text{tot}}(\lambda^*) = 0$ son $\lambda^* \in \{-1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$