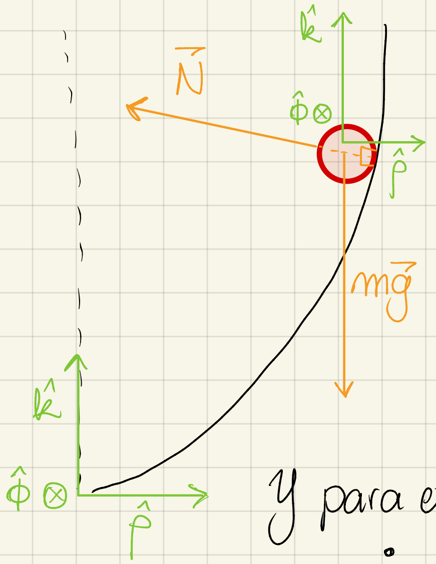
Auxiliar 7

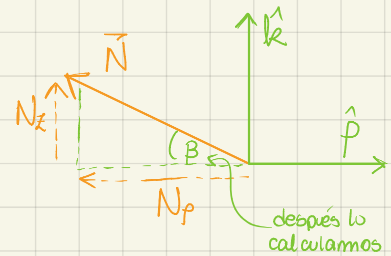
P1



Notamos que solo tenemos dos fuerzas actuando sobre la partícula: la normal **perpendicular** a la superficie y el peso en $-\hat{k}$

Por enunciado, debemos elegir un sist. de coord. cilíndricas con origen en la base de la copa

Toca descomponer las fuerzas



- Peso: $\vec{F}_p = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$

Y para expresar la aceleración (en cilíndricas) usamos que

- $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$
- $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

así que tendríamos

el radio de una órbita en específico

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}}^{0} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\,\hat{\phi} + \cancel{\ddot{z}}^{0}\hat{k} = -\rho\,\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi}$$

donde ocupamos la expresión con derivada en $\hat{\phi}$ porque no hay fuerzas en $\hat{\phi}$ y por lo tanto hay conservación del momentum angular

Reemplazando en segunda Ley de Newton, $m\vec{a} = \sum\vec{F}$

$$-m\rho\,\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$$

con lo que conseguimos la **ec. de movimiento vectorial**. Obtengamos las ecs. escalares

$$\hat{\rho})\quad -m\rho\,\dot{\phi}^2 = N_\rho$$

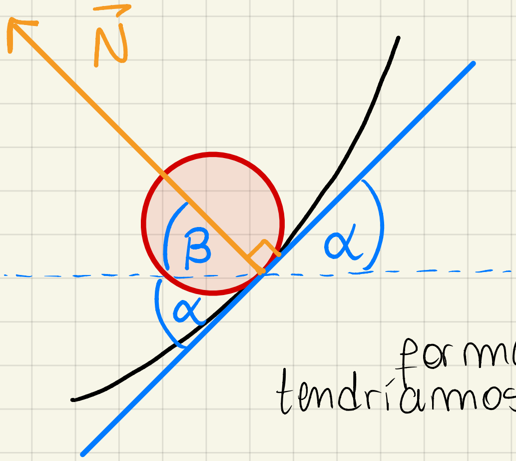
$$\hat{\phi})\quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0$$

$$\hat{k})\quad 0 = -mg + N_z \Rightarrow N_z = mg$$

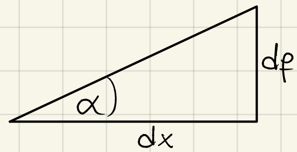
Donde, recordar que ρ es el radio de la órbita que seguiría la partícula.
Ahora, no conocemos la expresión de N_ρ como para despejar $\dot{\phi}$ de $\hat{\rho})$, por lo que

debemos buscar la expresión de esta normal.

Notamos que en $\hat{\rho})$ tenemos la normal en $\hat{\rho}$, pero como sucede siempre, no sabemos su expresión a priori (no hay una fórmula general para la normal, depende del problema), pero geométricamente podemos ver que N_ρ y N_z vienen de la misma normal, por lo que están relacionadas.



Por cálculo diferencial tenemos que la pendiente en un punto x de una curva $f(x)$ es



$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \tan(\alpha)$$

y esta pendiente es igual a la tangente del ángulo formado con la horizontal. Así que en este problema tendríamos que

$$\tan\alpha = \frac{df(\rho)}{d\rho} = \frac{dz}{d\rho}$$

y tenemos que $\tan\alpha = \tan(\pi/2 - \beta) = \frac{1}{\tan\beta}$, por lo que las normales serían

$$\vec{N} = N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k} \longrightarrow N_\rho = -N\cos\beta \quad \wedge \quad N_z = N\sin\beta$$

y como $\tan = \sin/\cos \Rightarrow \frac{1}{\tan\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -\frac{N_\rho/N}{N_z/N} = -\frac{N_\rho}{N_z}$

$$\therefore N_\rho = -\frac{N_z}{\tan\beta} = -N_z\frac{dz}{d\rho} = -mg\frac{dz}{d\rho}$$

por $\hat{k})$

Ahora si, reemplazando en $\hat{\rho})$

$$\Rightarrow -m\rho\dot{\phi}^2 = -mg\frac{dz}{d\rho}$$

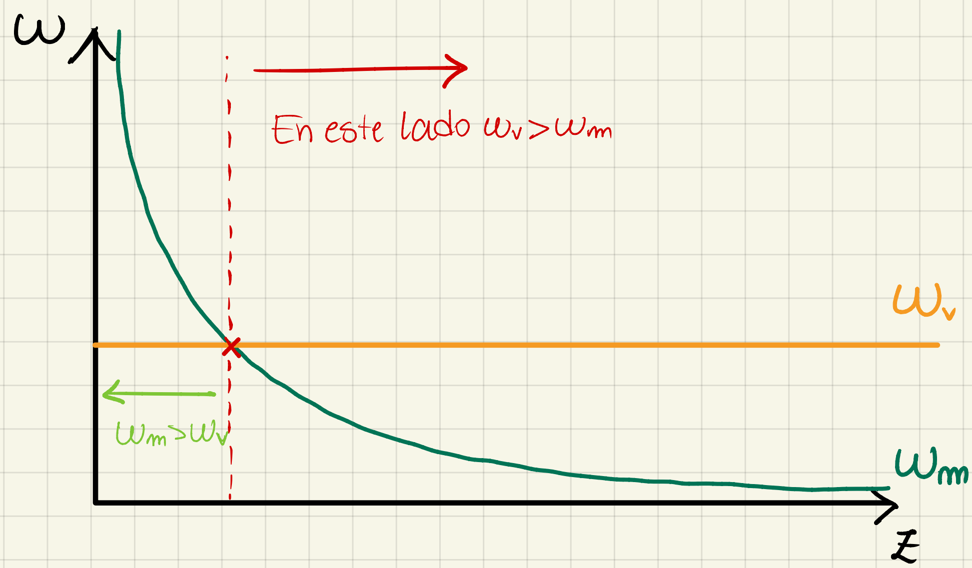
$$\Leftrightarrow \dot{\phi}(\rho) = \boxed{\sqrt{\frac{g}{\rho}\frac{dz}{d\rho}} \equiv \omega}$$

Reemplazando en ambos casos

- Martini $(z_m = \rho)$: $\frac{dz_m}{d\rho} = \frac{d\rho}{d\rho} = 1 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{g}{\rho}}$

▫ Vino $\left(z_v = H(\rho/R)^2 \right)$: $\dfrac{dz_v}{d\rho} = \dfrac{2H\rho}{R^2} \Rightarrow \omega_v = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}\,\dfrac{2H\rho}{R^2}} = \sqrt{\dfrac{2Hg}{R^2}}$

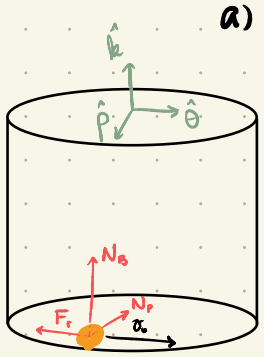
Para saber cuál tendría mayor velocidand angular, habría que saber la altura en específico, ya qui para una áltura muy grande $\omega_m \to 0$ (recordar $z_m = \rho$), mientras qui ω_v es constante para cualquier altura



P2

★ Aquí use θ como ϕ, es notación

a) Usamos coord. cilíndricas. Las fuerzas involucradas son: el peso en $-\hat{k}$, la normal de la base en $\hat{k}$, la normal de la pared en $-\hat{\rho}$ y la fuerza de roce cinético en $-\hat{\theta}$



$$\Rightarrow m((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}) = -mg\hat{k} + N_B\hat{k} - N_p\hat{\rho} - N_p\mu_c\hat{\theta}$$

donde $\ddot{\rho}=\dot{\rho}=\ddot{z}=0 \wedge \rho=R$, por lo que las ecs escalares quedan como:

$$\hat{\rho})\quad -mR\dot{\theta}^2 = -N_p \quad (1)$$
$$\hat{\theta})\quad mR\ddot{\theta} = -N_p\mu_c \quad (2)$$
$$\hat{k})\quad 0 = -mg + N_B \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (2), se tiene:

$$\cancel{mR}\ddot{\theta} = -\cancel{mR}\dot{\theta}^2\mu_c$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\dot{\theta}^{\cancel{2}}\mu_c \qquad / \int d\theta$$
$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\mu_c\int_0^{\theta} d\theta$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_0}\right) = -\mu_c\theta$$

donde se tiene $v_0 = R\dot{\theta}_0$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{R\dot{\theta}}{v_0}\right) = -\mu_c\theta$$
$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(\theta) = \frac{v_0}{R}e^{-\mu_c\theta} \quad (4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{R}e^{-\mu_c\theta} \qquad / \int dt$$
$$\Rightarrow \int_0^{\theta} e^{\mu_c\theta}d\theta = \frac{v_0}{R}\int_0^t dt$$
$$\Leftrightarrow \left.\frac{e^{\mu_c\theta}}{\mu_c}\right|_0^{\theta} = \frac{v_0 t}{R}$$
$$\Leftrightarrow e^{\mu_c\theta} - 1 = \frac{\mu_c v_0 t}{R}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{\mu_c}\ln\left(\frac{\mu_c v_0 t}{R} + 1\right) \quad (5)$$

La partícula se detiene si $\dot{\theta}=0$, de (4) vemos que esto ocurre cuando $\theta \to \infty$ y de (5) sabemos que esto se tiene para $t \to \infty$

b) La partícula da la vuelta cuando $\theta = 2\pi$, reemplazando en (4) tenemos

$$\dot{\theta}(\theta=2\pi) = \frac{v_0}{R}e^{-2\pi\mu_c} \Rightarrow v(\theta=2\pi) = v_0 e^{-2\pi\mu_c}$$

c) Imponemos $\theta = 2\pi$ en (5)

$$\Rightarrow 2\pi = \frac{1}{\mu_c}\ln\left(\frac{\mu_c v_0 t_1}{R} + 1\right) \Rightarrow t_1 = \frac{R}{\mu_c v_0}\left(e^{2\pi\mu_c} - 1\right)$$

d) Ahora (2) pasaría a ser $mR\ddot{\theta} = -N_\theta \mu_c = -mg\mu_c$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}\, d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \quad / \int d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 - \frac{v_0^2}{R^2} = -\frac{2g\mu_c\theta}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\theta) = \sqrt{-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\theta = dt \quad / \int$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} \left(-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}\right)^{-1/2} d\theta = \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{R}{g\mu_c} \sqrt{-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}}\,\Bigg|_0^{\theta} = t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\frac{2g\mu_c}{R}\theta + \frac{v_0^2}{R^2}} - \frac{v_0}{R} = -\frac{g\mu_c}{R}t$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = -\frac{R}{2g\mu_c}\left[\left(-\frac{g\mu_c}{R}t + \frac{v_0}{R}\right)^2 - \frac{v_0^2}{R^2}\right] = -\frac{R}{2g\mu_c}\left[\left(\frac{g\mu_c}{R}\right)^2 t^2 - \frac{2g\mu_c v_0 t}{R^2}\right]$$

$$= -\frac{g\mu_c}{2R}t^2 + \frac{v_0}{R}t \quad (7)$$

También podemos integrar la ec de mov. c/r al tiempo

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{R}\mu_c \quad / \int dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\mu_c \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = -\frac{g}{R}\mu_c t + \frac{v_0}{R}$$

Imponiendo que pare en $t_2 \Rightarrow 0 \overset{!}{=} -\frac{g\mu_c}{R}t_2 + \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow t_2 = \frac{v_0}{g\mu_c}$

e) Usamos (6) con $\theta = 2\pi \Rightarrow \dot{\theta}(\theta = 2\pi) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4\pi g\mu_c}{R}}$

f) Usamos (7) con $\theta = 2\pi \Rightarrow 2\pi \overset{!}{=} -\frac{g\mu_c}{2R}t_3^2 + \frac{v_0}{R}t_3$

$$\Leftrightarrow at_3^2 + bt_3 + c = 0, \text{ con } a = \frac{g\mu_c}{4\pi R},\ b = -\frac{v_0}{2\pi R} \text{ y } c = 1$$

$$\Rightarrow t_{3,1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R}}{g\mu_c}$$

donde consideramos la primera solución ($\sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R} < v_0$)

$$\Rightarrow t_3 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 4\pi g\mu_c R}}{g\mu_c}$$